

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Barba, G.: Polinomi definiti. III. Interpretazioni, proprietà e complementi. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 19—23 (1937).

Der Verf. behandelt hauptsächlich die Transformation

$$Q(x) = e^{\alpha x} \int_x^{\infty} e^{-\alpha x} \cdot P(x) dx,$$

welche offenbar nichtindefinite Polynome wieder in nicht indefinite Polynome überführt. Er untersucht diese Transformationen in bezug auf ihre Gruppeneigenschaft (mit Hilfe der sog. Hadamardschen Produkte), führt für sie symbolische Bezeichnung

$$Q(x) = -\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{D}{\alpha}\right)^{-1} P(x)$$

ein und findet gewisse sowohl hinreichende wie auch notwendige Kriterien dafür, daß ein Polynom nichtindefinit ist. (II. vgl. dies. Zbl. 16, 147.) N. Tschebotarow.

Zia-ud-din, M.: On some theorems concerning determinantal symmetric functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 265—268 (1937).

Verallgemeinerung der Betrachtungen über Alternanten und Bi-Alternanten; vgl. dies. Zbl. 8, 385. L. Schrutka (Wien).

Faddeeff, L. K.: Über eine Umformung der charakteristischen Gleichung einer Matrix. Ann. Inst. Ing. Bâtiments Industr. Leningrad H. 4, 78—86 (1937) [Russisch].

In discussing the problem of small oscillations of material systems, A. N. Krylov gave a method of transforming the characteristic equation of a matrix with the aid of a certain differential equation connected with the matrix (this Zbl. 2, 291). Subsequently, N. N. Luzin gave a detailed analysis of the algebraic nature of Krylov's transformation (this Zbl. 4, 49; 6, 244). The present note gives a simple exposition of Krylov's method based on the elementary matrix theory. I. S. Sokolnikoff.

Williamson, John: On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics. Amer. J. Math. 59, 599—617 (1937).

The author solves a purely algebraic problem which has its origin in the transformation theory of linear conservative dynamical systems (see Wintner, this Zbl. 9, 379; Williamson, this Zbl. 13, 284). Let G be the skew-symmetric matrix $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, where E is the unit matrix of order n . A non-singular matrix A of order $2n$ is canonical if $A'GA = G$, where A' is the transposed of A . The problem treated is that of determining conditions under which two canonical matrices A_1 and A_2 are similar under a canonical transformation. A first necessary condition is, of course, that the elementary divisors of the pencil $A_1 - \lambda E$ be the same as those of the pencil $A_2 - \lambda E$. A second condition is shown to be that the indices of all elementary divisors $(\lambda \pm 1)^{2k}$ and of all conjugate elementary divisors $(\lambda - a \pm ib)^k$, $a^2 + b^2 = 1$, must be the same for both pencils. These conditions also form a sufficient set. Normal forms for canonical matrices under canonical transformations are displayed. Hedlund (Bryn Mawr).

Flood, Merrill M.: Column normal matrix polynomials. Ann. of Math., II. s. 38, 465—468 (1937).

Let $P = P^{pq}(\lambda)$ be a matrix polynomial (m. p.) in λ of order (p, q) , i. e., a matrix of p rows and q columns whose elements are polynomials in λ with complex coefficients. Denote by $d(P)$ and $p(P) = \varrho$ the degree and rank of P , respectively. There exists an elementary m. p. $E = E^{qq}(\lambda)$ such that $N = PE$ is column normal, i. e., the first

$m = q - \rho$ columns of N are zero vectors and the last ρ columns form a normal basis (Wedderburn, Lectures on Matrices, p. 47—49) of the integral set $W(P)$ of linear combinations with polynomial coefficients of the columns of P . Set $d_1(P) = \dots = d_m(P) = 0$ and let $d_i(P)$, $i = m + 1, \dots, q$, be the degrees of the corresponding columns of N . Then $d_{m+1}(P) \leq d_{m+2}(P) \leq \dots \leq d_q(P)$ and $d_1(P), \dots, d_q(P)$ are called the column invariants of P . The author proves that $d(PX) \geq d_{p(X)}(P)$ for any m. p. $X = X^{qk}(\lambda)$ and that for $0 \leq j \leq q$ and $k \geq j$ there exists an m. p. $X = X^{qk}(\lambda)$ such that $d(PX) = d_j(P)$. Also, if $\rho = q = p$ and $C_r(P)$ is the r -th compound of P (Wedderburn, l. c. p. 64) then the column invariants of $C_r(P)$ are $\gamma_1, \dots, \gamma_\theta$, where $\theta = \binom{p}{r}$ and $\gamma_1, \dots, \gamma_\theta$ are the sums of the integers $d_1(P), \dots, d_p(P)$ taken r at a time and arranged in increasing order. Various corollaries of these results are given. *Hull.*

Popoviciu, Tiberiu: Remarques sur le maximum d'un déterminant dont tous les éléments sont non négatifs. *Bul. Soc. şti. Cluj* 8, 572—582 (1937).

Es sei $\Delta = \|a_{ik}\|$ eine Determinante n -ter Ordnung mit reellen Elementen. Nach dem bekannten Hadamardschen Satz ist

$$|\Delta| \leq \sqrt{n^n M^n}, \quad \text{wenn} \quad |a_{ik}| \leq M \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

Wenn die Elemente a_{ik} speziellen Bedingungen unterliegen, ist es oft möglich, die obere Schranke durch eine genauere zu ersetzen. Verf. beweist: Wenn

$$0 \leq a_{ik} \leq M, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

so ist

$$|\Delta| \begin{cases} < \sqrt{\frac{n^n(n+2)^n}{4^n(n+1)^{n-1}}} M^n, & (n \text{ gerade}) \\ \leq \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}{2^n} M^n. & (n \text{ ungerade}) \end{cases}$$

Das Gleichheitszeichen kann nur auftreten, falls n die Gestalt $n = 4p - 1$ hat. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind dann:

$$1. \quad (n+1) \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)^2 M^2, \quad i \neq k;$$

2. in jeder Zeile (und jeder Kolonne) sind $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ Elemente gleich M , die übrigen gleich Null. — Verf. behandelt auch noch den Fall $0 \leq m \leq a_{ik} \leq M$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Die Formeln werden dann aber im allgemeinen viel komplizierter. *T. Ridder.*

Neumann, J. v.: Some matrix-inequalities and metrization of matric-space. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* 1, 286—299 (1937).

Einer Distanzfunktion $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ der reellen Variablen u_i im Sinne von Minkowski, d. h. einer Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- I. $\varphi(u_1, \dots, u_n) \geq 0$,
- II. aus $\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0$ folgt $u_1 = \dots = u_n = 0$,
- III. $\varphi(tu_1, \dots, tu_n) = t\varphi(u_1, \dots, u_n)$ für $t \geq 0$,
- IV. $\varphi(u_1 + u'_1, \dots, u_n + u'_n) \leq \varphi(u_1, \dots, u_n) + \varphi(u'_1, \dots, u'_n)$,

entspricht eindeutig eine „konjugierte“ $\psi(v_1, \dots, v_n)$, die Stützfunktion des konvexen Körpers $\varphi(u_1, \dots, u_n) \leq 1$, die ebenfalls die Eigenschaften I—IV besitzt und durch

$$\psi(v_1, \dots, v_n) = \text{Max}_{\sum u_i^2 > 0} \frac{\sum u_i v_i}{\varphi(u_1, \dots, u_n)}$$

definiert werden kann. φ ist umgekehrt die Konjugierte von ψ . Eine Distanzfunktion $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ wird symmetrisch genannt, wenn sie V. bei beliebigen Permutationen und Vorzeichenänderungen der u_i ungeändert bleibt. Die Konjugierte einer symmetrischen Distanzfunktion ist wieder symmetrisch.

$$\frac{1}{\varphi_p} = \left(\sum |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ist eine symmetrische Distanzfunktion, und ihre konjugierte ist φ_q , wo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für diese bekannten Zusammenhänge werden einleitend durchsichtige Beweise gegeben. — Das Ziel der Arbeit ist, jedem Paar symmetrischer konjugierter Distanzfunktionen φ, ψ ein Paar konjugierter Distanzfunktionen $|A|_\varphi$ und $|B|_\psi$ im $2n^2$ -dimensionalen Raume der komplexen n -reihigen Matrizen $A = (a_{ij})$ derart zuzuordnen, daß diese Funktionen zur Spur $\text{Sp}(AB)$ des Produktes zweier Matrizen A und B in derselben Relation stehen wie φ und ψ zum inneren Produkt $\sum u_i v_i$ und eine unten zu nennende Invarianzeigenschaft besitzen. Kern der Untersuchung bildet die Lösung des folgenden Maximumproblems. Es seien A und B feste Matrizen, $A^* = (\bar{a}_{ji})$ und $B^* = (\bar{b}_{ji})$ ihre Hermitesch konjugierten, ferner $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n$ bzw. $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_n$ die (nicht negativen) Eigenwerte von AA^* bzw. BB^* . Dann ist das Maximum von $\Re \text{Sp}(AUBV)$, wo U und V alle unitären Matrizen durchlaufen, gleich $\sum_{i=1}^n \xi_i^\dagger \eta_i^\dagger$. Sind nun φ eine symmetrische Distanzfunktion und u_1, \dots, u_{2n^2} die $2n^2$ reellen und imaginären Teile der a_{ij} , so wird gesetzt

$$|A|_\varphi = \Phi_\varphi(u_1, \dots, u_{2n^2}) = \varphi(\xi_1^\dagger, \dots, \xi_n^\dagger).$$

Dann gilt: $|A|_\varphi = \Phi_\varphi$ ist eine Distanzfunktion im Raume der u_1, \dots, u_{2n^2} . Ist ψ die Konjugierte von φ , so ist $|B|_\psi = \Phi_\psi$ die Konjugierte von Φ_φ . (In der Arbeit wird dies irrtümlich von $2|B|_\psi$ behauptet.) Es ist

$$|\text{Sp}(AB)| \leq |A|_\varphi |B|_\psi,$$

und bei festem A gilt = für mindestens ein B . Die Metrik $|A|_\varphi$ im Matrizenraum hat die Invarianzeigenschaft $|UAV|_\varphi = |A|_\varphi$ für beliebige unitäre U und V . Ein Teil des obigen Ergebnisses läßt die folgende einfache geometrische Deutung zu: Es seien A, B beliebige Matrizen, $C = \alpha A + \beta B$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ und ξ_1, \dots, ξ_n , η_1, \dots, η_n , ζ_1, \dots, ζ_n die Eigenwerte von AA^* , BB^* bzw. CC^* . Dann gehört der Punkt $(\zeta_1^\dagger, \dots, \zeta_n^\dagger)$ der konvexen Hülle der Punkte $(\pm \xi_{i_1}^\dagger, \dots, \pm \xi_{i_n}^\dagger)$, $(\pm \eta_{i_1}^\dagger, \dots, \pm \eta_{i_n}^\dagger)$ an, wo alle Vorzeichenkombinationen und alle Permutationen i_1, \dots, i_n von $1, \dots, n$ zu nehmen sind. — [T. Rella hat eine axiomatische Charakterisierung der Metrik $|A|_\varphi$ für $\varphi(u_1, \dots, u_n) = \text{Max}|u_i|$ angegeben; vgl. C. R. Congrès Internat. Mathém., Oslo 1936, 2, 29—31.] W. Fenchel (Kopenhagen).

Ulm, Helmut: Elementarteilertheorie unendlicher Matrizen. Math. Ann. 114, 493—505 (1937).

The present paper obtains canonical forms for an abelian group \mathfrak{G} having a denumerable set of generators relative to $K[\lambda]$ as operator domain where K is an algebraically closed field. \mathfrak{G} has a "reduced" basis relative to which the matrix of relations is of the form $\mathfrak{A} + \lambda \mathfrak{E}$, \mathfrak{A} having elements in K only a finite number of which in each row are $\neq 0$ and \mathfrak{E} , the identity matrix of the same ordinal type as \mathfrak{A} . A necessary and sufficient condition that \mathfrak{G} and \mathfrak{G}' be isomorphic is that \mathfrak{A} be similar to the corresponding matrix \mathfrak{A}' . If \mathfrak{G} has only elements of finite order, i.e., for every $x \in \mathfrak{G}$ there exists an $h(\lambda)$ such that $h(\lambda)x = 0$, then certain factor group invariants of a simple type defined in terms of the notion of height [cf. Prüfer, Math. Z. 17, 35 (1923), and Ulm, Math. Ann. 107, 774, or this Zbl. 6, 150] completely characterize \mathfrak{G} . The matrix \mathfrak{A} in this case has a denumerable spectrum, i.e., a denumerable set of values of λ such that $\mathfrak{A} + \lambda \mathfrak{E}$ does not have a unique inverse, and conversely. In general either this obtains or all but a denumerable set of values belong to the spectrum. The existence of groups with arbitrary invariants satisfying certain necessary conditions is proved.

Jacobson (Chapel Hill, N. C.).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Ingraham, M. H., and M. C. Wolf: Relative linear sets and similarity of matrices whose elements belong to a division algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 16—31 (1937).

Let K denote a commutative field and M a matrix with elements in K . The linear

relations among vectors obtained by using elements of the polynomial-ring $K[M]$ as coefficients are studied. In this way rational methods lead to a test for similarity or non-similarity between M and any other given matrix, to familiar canonical forms for M and to a determination of the elementary divisors of M (if they lie in K ; otherwise their analogues in the field are found). The procedure is modified to suit the case K a division algebra and similar results (in particular, a rational test for similarity) are obtained when K has a finite basis over its centrum C . The rank of a polynomial in M with coefficients in C is studied.

J. L. Dorroh (Marion).

Teichmüller, Oswald: Der Elementarteilersatz für nichtkommutative Ringe. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1937, 169—177.

The author extends the known result that a matrix A whose coordinates are in a non-commutative euclidean or a commutative principal ideal domain of integrity R is equivalent to a diagonal matrix D ($A = PDQ$, P and Q units) whose element k_i in the diagonal is a divisor (right and left) of k_{i+1} . He shows that the same holds for R any non-commutative domain of integrity in which every right and every left ideal is respectively a principal right and left ideal and that D may be chosen so that k_i is an absolute divisor of k_{i+1} in the sense that the sub-domain $Rk_{i+1}R \subseteq Rk_i \cap k_iR$. A related condition for the case R a ring of non-commutative polynomials has been given by the present referee (this Zbl. 13, 146). Incidental to the main result the author obtains several properties ("unique" factorization, existence of least common multiples) of domains of the type described.

Jacobson (Chapel Hill, N. C.).

Vandiver, H. S.: Note on a certain ring-congruence. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 418—423 (1937).

The author proves the following theorem. Let R be a ring containing the ring of rational integers. Put $f_n(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ki}) = \sum_1^{k_i} \alpha_{ri} a_{ri}^{n_i}$ ($i = 1, \dots, s$), where the a 's are rational integers and the α 's are in R . Let m be any rational integer and $a^d \equiv 1 \pmod{m}$ for every a prime to m . Let l_i ($i = 1, \dots, s$) be the g. c. d. of all those of the integers $a_{1i}^{n_i}, \dots, a_{ki}^{n_i}$ which are not prime to m . Finally let β_1, \dots, β_s be rational integers such that $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s \equiv 0 \pmod{m}$. Then $(f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_s})^j \equiv 0 \pmod{(m^j, l_1, \dots, l_s)}$, where the left member is a symbolic power to be expanded by the multinomial theorem and then f_{n_i} replaced by

$$\beta_i^{j_i} f_{n_i + t_i d}(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ki}) \quad (t = 0, \dots, j; i = 1, \dots, s).$$

From this theorem results of Kummer [J. f. Math. 41, 368—372 (1851)] related to Bernoulli numbers and Frobenius (S.-B. Berlin. math. Ges. 1910, 826 and 841) related to Euler polynomials are obtained and the possibility of generalizations of their results mentioned.

Hull (Urbana, Ill.).

Zahl- und Funktionenkörper:

Nagell, Trygve: Bemerkungen über zusammengesetzte Zahlkörper. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1937, 1—26 (Nr 4).

Ein algebraischer Körper $K(\alpha, \beta)$ kann durch eine Zahl $\alpha + k\beta$ (k rational) erzeugt werden. Dies verwendet der Verf. zur „numerischen“ Bestimmung des zusammengesetzten Körpers. Der Grad eines Körpers $K(\alpha \pm \beta)$ wird bestimmt, wenn eine der Zahlen α, β quadratisch oder kubisch ist. Weiter wird eine Methode (ohne Gruppentheorie) zur numerischen Bestimmung der Unterkörper eines algebraischen Körpers $K(\alpha)$ behandelt. Speziell werden die Unterkörper der Körper vierten und sechsten (für Spezialfälle auch neunten) Grades bestimmt.

Oystein Ore.

Zariski, Oscar: Some results in the arithmetic theory of algebraic functions of several variables. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 410—414 (1937).

P sei der Polynombereich $K[x_1, \dots, x_r]$, Σ eine endliche algebraische Erweiterung des Quotientenkörpers von P , \mathfrak{o} der Ring der ganzen Größen von Σ . Es handelt sich um die Untersuchung der nulldimensionalen Ideale des Ringes \mathfrak{o} im Fall eines

algebraisch-abgeschlossenen Körpers K von der Charakteristik Null. Jedes nulldimensionale Primideal $\mathfrak{X} = (x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r)$ von P zerfällt in Primideale $q_1 q_2 \dots q_r$ in \mathfrak{o} . Sind q_1, \dots, q_r alle prim, so heißt \mathfrak{X} unverzweigt. Verzweigt sind die Primideale \mathfrak{X} , die in alle Diskriminanten der Elemente von \mathfrak{o} aufgehen. Ist q_1 prim: $q_1 = \mathfrak{p}_1$, so heißt \mathfrak{p}_1 relativ zu den Variablen x_i unverzweigt; die Elemente von \mathfrak{o} lassen sich in diesem Fall in Potenzreihen nach $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$ entwickeln.

Relativ verzweigt sind diejenigen \mathfrak{p} , die in allen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} N(t - \omega)|_{t=\omega}$ aufgehen. Die Primideale von \mathfrak{o} entsprechen eindeutig den Punkten einer Mannigfaltigkeit V_r . Die Primideale, die den vielfachen Punkten von V_r entsprechen, sind bei jeder Wahl der Variablen x_1, \dots, x_r verzweigt (absolut verzweigt); diejenigen aber, die einfachen Punkten entsprechen, sind bei passender Wahl der Variablen relativ unverzweigt. Ein Kriterium dafür ist, daß der Rang von $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ gleich r ist. Zum Schluß werden Eigenschaften der Führer der Ringe $K[x_1, \dots, x_r, \omega]$ angegeben; insbesondere werden die im Führer aufgehenden nulldimensionalen Primideale charakterisiert. Beweise werden noch nicht gegeben. van der Waerden (Leipzig).

Hasse, H., und F. K. Schmidt: Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten. J. reine angew. Math. 177, 215—237 (1937).

$K = k(x, y)$ sei ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten x über dem Konstantenkörper k , $f(x, y) = 0$. $K = k(\xi, \eta)$, $f(\xi, \eta) = 0$ sei zu K über k isomorph und $\mathfrak{K} = K/K$ durch Erweiterung von k zu K aus K entstanden. Es gibt genau einen Primdivisor (ersten Grades) \mathfrak{P} von \mathfrak{K}/K mit $\eta \equiv y \pmod{\mathfrak{P}}$ für alle Paare η, y einander entsprechender Elemente von K und \mathfrak{K} ; für separierendes x ist $\xi - x$ genau durch die erste Potenz von \mathfrak{P} teilbar. x sei separierend. Für ein beliebiges y aus K werden die höheren Ableitungen $\frac{d^k y}{dx^k}$ (genauer die Analoga von $\frac{1}{k!} \frac{d^k y}{dx^k}$) folgendermaßen erklärt: Dem y entspreche in K das Element η , und dessen \mathfrak{P} -adische Entwicklung

mit Koeffizienten aus K sei $\eta = \sum_{k=0}^{\infty} y_k (\xi - x)^k$. Dann ist $\frac{d^k y}{dx^k} = y_k$. Aus dieser

Definition ergeben sich sofort die Summenregel, die Produktregel, die Regel $\frac{d^k(\text{konst. } y)}{dx^k} = \text{konst.} \frac{d^k y}{dx^k}$ und daraus die sonst als Definition gebrauchte Formel

$\frac{dy}{dx} = -f_x(x, y)/f_y(x, y)$, ferner die Kettenregel. Um den Zusammenhang mit der

lokalen Differentiationstheorie (H. Hasse, dies. Zbl. 10, 6 u. 13, 341) herzustellen, wird gezeigt: Hat der Primdivisor \mathfrak{p} von K/k einen über k separablen Restklassenkörper $k_{\mathfrak{p}}$, und ist p ein Primelement zu \mathfrak{p} , so liefert die \mathfrak{p} -adische Entwicklung

$y = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} p^{\mu}$, a_{μ} aus $k_{\mathfrak{p}}$ von y aus K durch gliedweises Differenzieren die \mathfrak{p} -adische

Entwicklung $\frac{d^k y}{dx^k} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{p}{k} a_{\mu} p^{\mu-k}$. \mathfrak{M} sei ein k -Modul endlichen Ranges n in K ,

x ein separierendes Element von K . Ist y_0, \dots, y_{n-1} eine Basis von \mathfrak{M}/k , so hängt der Hauptdivisor $\mathfrak{d}_x(\mathfrak{M}) \cong \left| \frac{d^k y_i}{dx^k} \right|$, $i, k = 0, 1, \dots, n-1$, nicht von der Basiswahl

ab und es gilt für ein anderes separierendes Element t die Umrechnungsformel $\mathfrak{d}_t(\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{d}_x(\mathfrak{M}) \left(\frac{dx}{dt} \right)^{1+2+\dots+(n-1)}$, so daß der Divisor $\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{d}_x(\mathfrak{M}) (dx)^{1+2+\dots+(n-1)}$

von x unabhängig allein durch \mathfrak{M} bestimmt ist. Ist \mathfrak{p} ein Primdivisor ersten Grades von K/k und $y_i = p^{e_i} + \dots$ (\mathfrak{p} -adisch), $e_0 < e_1 < \dots < e_{n-1}$, eine für \mathfrak{p} normierte

Basis von \mathfrak{M}/k , so ist $\left| \frac{d^k y_i}{dx^k} \right| = \left| \binom{e_i}{k} \right| p^{\sum e_i - \sum k} + \dots$, so daß $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ genau durch die

Potenz $p^{\sum_{i=0}^{n-1} (e_i - i)}$ von \mathfrak{p} teilbar ist, wenn die Charakteristik von k in der Determinante $\left| \binom{e_i}{k} \right|$

nicht aufgeht. — In einem Nachtrag gibt F. K. Schmidt eine allgemeine Differentiationstheorie. I sei ein Integritätsbereich. Ist jedem $y \in I$ eine Folge $y^{(0)} = y, y', y'', \dots$ von Elementen eines Erweiterungsintegritätsbereiches I^* zugeordnet mit $(y+z)^{(v)} = y^{(v)} + z^{(v)}$ und $(yz)^{(v)} = \sum_{\mu=0}^v y^{(v-\mu)} z^{(\mu)}$, so heißt diese Zuordnung eine Differentiation

von I . $c \in I$ heißt absolute Differentiationskonstante, wenn $c' = c'' = \dots = 0$ ist. Ist $c' = c'' = \dots = c^{(e-1)} = 0$, aber $c^{(e)} \neq 0$, so heißt c eine Differentiationskonstante g -ter Ordnung. Ist $I^* = I$ und gilt $\binom{v}{\mu} y^{(v)} = (y^{(\mu)})^{(v-\mu)}$, so heißt die Differentiation

iterativ. Als Ordnungen von Differentiationskonstanten können in diesem Falle nur Potenzen der Charakteristik p auftreten. Falls nicht alle Ableitungen $y^{(v)}$ aller y gleich 0 sind, so kann durch eine Umbenennung erreicht werden, daß es ein y mit $y' \neq 0$ gibt, was immer vorausgesetzt sei. $T^* = I^*\{u\}$ sei der Integritätsbereich aller Potenzreihen der Unbestimmten u über I^* . $y \leftrightarrow Y = \dot{y} + y'u + y''u^2 + \dots$ ist eine Isomorphie zwischen I und einem $T \subseteq T^*$. Umgekehrt liefert jede solche Isomorphie eine Diff.; die Theorie der Diff. ist also mit der Theorie solcher Isomorphismen gleichwertig. Die Taylorentwicklungen $Y = y + y'u + y''u^2 \dots$ gestatten die Diff.

$D_\mu Y = \sum_{v=\mu}^{\infty} \binom{v}{\mu} y^{(v)} u^{v-\mu}$. Genau dann ist die gegebene Diff. iterativ, wenn ihre iso-

morphe Übertragung $Y \rightarrow Y, Y', Y'', \dots$ auf T mit dieser Diff. übereinstimmt. Von einer Diff. $y \rightarrow y, y', y'', \dots$ wird gesagt, sie gehe aus der Diff. $y \rightarrow y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots$ mittels x nach der Kettenregel hervor, wenn die Taylorreihe $y + y'u + y''u^2 + \dots$ aus der Taylorreihe $y + \dot{y}v + \ddot{y}v^2 + \dots$ durch Einsetzen von $v = x'u + x''u^2 + \dots$ hervorgeht. Wenn $x' \neq 0$ ist, so hat I genau eine Diff. $y \rightarrow y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots$, aus der die Diff. $y \rightarrow y, y', y'', \dots$ mittels x nach der Kettenregel hervorgeht, und es ist $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = \ddot{x} = \dots = 0$. Eine Diff. von I kann auf genau eine Weise auf den Quotientenkörper K von I und auf eine separable algebraische Erweiterung von K ausgedehnt werden. Das gleiche gilt für eine rein transzendente Erweiterung $K(x)$, wenn die Ableitungen von x beliebig vorgeschrieben werden. Iterativität bleibt in den beiden ersten Fällen stets erhalten, im dritten dann, wenn die Ableitungen von x iterativ sind. Es sei jetzt $I = K$ ein separabel erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über dem Konstantenkörper k . Alle Diff. von K/k , das sind die, für die alle $c \in k$ absolute Diff.-Konstanten sind, werden angegeben. Ist x separierend, so gibt es genau eine mit D_x zu bezeichnende Diff. mit $D_x x = 1$, $D_x^\nu x = 0$, $\nu > 1$. Der Übergang zur lokalen Diff. erfolgt ohne jede Rechnung so: K sei isomorph dem Teilkörper \bar{K} des Potenzreihenkörpers $\bar{k}\{x\}$, \bar{k} von endlichem Grad über k , und zwar sei

für $y = \sum_{\mu=0}^n c_\mu x^\mu$ auch $\bar{y} = \sum_{\mu=0}^n c_\mu x^\mu$. Für $y \in K$, $\bar{y} = \sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} c_\mu x^\mu$ gilt dann $\bar{D}_x^\nu \bar{y} = \sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} c_\mu x^{\mu-\nu}$.

Die iterativen Diff. lassen sich jetzt übersehen: Ist $p = 0$, so gibt es zu nichtkonstantem x und beliebigem z genau eine iterative Diff. von K/k mit $x' = z$, und das sind alle Diff. von K/k . Ist $p \neq 0$, so gibt es zu jeder iterativen Diff. ein separierendes Element t mit $D_t^\nu y = y^{(v)}$, $\nu = 1, 2, \dots, m$ für alle y und gegebenes m , so daß jede iterative Diff. beliebig genau durch eine Diff. nach einem Element angenähert werden kann.

Deuring (Jena).

Zahlentheorie:

Burehnall, J. L., and T. W. Chaundy: A type of „magic square“ in Tarry's problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 119—130 (1937).

Tarry's problem is, for the purpose of the authors, that of solving the system of equations

$$\sum_{r=1}^n x_r^k = \sum_{r=1}^n y_r^k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

in integers. Particular solutions have been found by various writers for $2 \leq n \leq 8$ (see this Zbl. 13, 199, 390) and the authors find parametric solutions for these values of n by means of a "magic square"; these solutions are the most general for $n = 2, 3, 4$. The method involves only "elementary" algebra. It is important for applications to find solutions or to prove their existence for $n > 8$. But the authors state that their method does not so far do this, and "the algebraic difficulties in the way of such a solution seem considerable".

Wright (Aberdeen).

Bell, E. T.: Representations in certain pure forms of degrees higher than the second. Amer. J. Math. 59, 585—598 (1937).

In the first part of the paper the representation of numbers by the form $a^3 + b^3 + pc^3$ is discussed in the light of solutions of the diophantine equation (1) $a^3 + b^3 + pc^3 = 0$. By introducing parameters x, y, z, w , so that $(aw + x)^3 + (bw + y)^3 + p(cw + z)^3 = 3Aw + B$, where A and B do not depend on w , various identities are derived in a systematic manner from which theorems on the representation of special numbers may be deduced. For example, from $2^3 + 1^3 + 7(-1)^3 = 0$ the identity $(2w - 3v)^3 - (w - 2v)^3 - 7(w - 2v)^3 = -21v^2(2w - v)$ is derived. Hence every multiple of 42 is of the form $m^3 - n^2 + 7(j^3 - 3k^3)$. By integrating (or differentiating) identities results concerning the representation of numbers by forms of one higher (or lower) degree are obtained. Numerous illustrations are given. A second method of deriving cubic identities is based on six quantities $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ such that $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma = 0$ and the application of two integrations to the resulting identity: $(ax + \alpha y) + (bx + \beta y) + (cx + \gamma y) = 0$. The paper concludes with a discussion of two solutions (a, b, c) , (α, β, γ) of (1) and the resulting identity $(ax + \alpha y)^3 + (bx + \beta y)^3 + p(cx + \gamma y)^3 = 3xy(Px + Qy)$, where P and Q are free of x and y . A two parameter family of solutions of $x^3 + y^3 = (u^3 + v^3)(z^3 + w^3)$ is derived as well as further results of the representation of integers by special cubic, quartic, and quintic forms. *D. H. Lehmer.*

Richmond, H. W.: A note on the four integer cube theorem. J. London Math. Soc. 12, 206 (1937).

The author summarises part of a paper of Mordell's (see this Zbl. 14, 203) and shows its connection with two papers of his own.

Wright (Aberdeen).

Hua, Loo-Keng: On a generalized Waring problem. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 161—182 (1937).

Further results concern integral-valued polynomials $P(x)$ of degree k , such that $P(x) \equiv d \pmod{q}$ identically for no integers $q(>1)$ and d . If $k > 20$, $G(P(x)) \leq 3^{1/k} 2^{1/(k-1)+7/k}$ and $G(P(x)) = O(k^3 \cdot 2^{k-1})$; if also k is odd, $G(P(x)) \leq (2^{k+1} - 1)/3$. The methods used are mainly due to Vinogradov (cf. this Zbl. 14, 204), Heilbronn (this Zbl. 13, 150), and Hua (this Zbl. 13, 390; 14, 294; 15, 388). Representation by sums of values of different polynomials is considered. A solution of Tarry's problem for $k = k_0$ is shown to lead to an upper bound for $G(P(x))$ for $k \geq k_0$. It is stated that every large $n = a_1 x_1^k + \dots + a_s x_s^k$ (a_1, \dots, a_s admissible in sense of Huston, this Zbl. 11, 248) with $S \geq 6k \log k + \{4 + 3 \log(3 + 2k^{-1})\}k + 3$. Special results are stated for small values k .

G. Pall (Montreal).

Erdős, Paul: On the sum and difference of squares of primes. II. J. London Math. Soc. 12, 168—171 (1937).

The author proves (by Brun's method) that, for an infinity of n , the number of solutions of the equation $n = p^2 + q^2$ in primes p and q is greater than $\exp\left(\frac{c \log n}{\log \log n}\right)$. This is an improvement of the author's previous result (see this Zbl. 16, 201). The author also proves the theorem: Let $r_1 < r_2 < \dots$ be an infinite sequence of positive integers such that for an infinity of N the number of r 's less than or equal to N is greater than $N \exp\left(-\frac{c_1 \log N}{\log \log N}\right)$ with $c_1 < \frac{1}{2} \log 2$. Then for an infinity of M the number

of solutions of the equation $r_j^2 - r_i^2 = M$ is greater than $\exp\left(\frac{c_5 \log M}{\log \log M}\right)$, where c_5 depends only upon c_4 .
Wright (Aberdeen).

Fistié, M.-G.: Un théorème relatif aux fractions continues. *Mathesis* 51, 172—173 (1937).

Si $2k$ est le nombre des quotients incomplets périodiques de la fraction continue égale à la racine carrée du nombre entier non carré parfait N , le $(k+1)^{\text{e}}$ diviseur employé dans la recherche de cette fraction continue est un facteur de $2N$. *Auszug.*

Bergström, Viktor: Einige Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen. *Fysiogr. Sällsk. Lund Förh.* 6, 113—131 (1937).

Diese Arbeit wurde schon in Zusammenhang mit einer älteren Arbeit des Verf. referiert (dies. Zbl. 14, 253).
J. F. Koksma (Amsterdam).

Stepanoff, W.: Démonstration arithmétique d'un théorème de B. Segal. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 16, 75—76 (1937).

Zu stetig wachsendem $N > 1$ sollen natürliche Zahlen x, y so bestimmt werden, daß $d = |N - xy|$ und $\delta = |x - y|$ klein werden. Nach Segal (s. dies. Zbl. 8, 244) ist dies mit $d = O(N^{\frac{1}{2}})$, $\delta = o(N^{\frac{1}{2}})$ möglich. Verf. verschärft es, indem er mit elementaren Mitteln zeigt: Ist $n = [N^{\frac{1}{2}}]$ und $z = 1, 2, 3, \dots$, so gilt für geeignet gewählte x, y

$$\begin{aligned} d &\leq n + \frac{1}{2}, & \delta &\leq 2n, & \text{sobald} & z(z+1) < N < (z+1)^2; \\ d &\leq n, & \delta &\leq 2n-1, & \text{,,} & z^2 < N < z(z+1), \end{aligned}$$

und die d -Schranke kann nicht verkleinert werden, ohne daß die δ -Schranke vergrößert wird. — Der Beweis muß an einer Stelle ergänzt werden, da Verf. den Fall $k = n+1$ nicht berücksichtigt, der genau für $k(k-1) < z < k^2$ vorliegt. In diesem Fall geht alles noch für $N \geq K_{k-1}$, da dann $d \leq k-1$, $\delta \leq 2k-3$ möglich ist. Sobald aber $K_{k-1} > N > z^2$, wähle man $x = y = z$. Das liefert $d \leq k-1$, $\delta = 0$, weil $K_{k-1} - z^2 \leq z + k - k^2 \leq k-1$.
A. Walfisz (Tiflis).

Khintchine, A.: Abschätzungen beim Kroneckerschen Approximationssatz. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* 1, 261—265 (1937).

Im Anschluß an seine Untersuchung des Kroneckerschen Satzes in der „inhomogenen Fassung“ (approximative Lösung von $\theta_i x - y_i - \beta_i = 0$ in ganzen x) (dies. Zbl. 15, 154) bringt Verf. jetzt den analogen Satz für die „homogene“ Fassung (approximative Lösung von $\theta_i x - y_i - \beta_i = 0$ in reellen x): Satz. Damit ein $\Gamma = \Gamma(\theta_1, \dots, \theta_n)$ existiert von der Beschaffenheit, daß für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ und alle reellen β_1, \dots, β_n die Ungleichungen

$$0 < t < \Gamma \varepsilon^{-n+1}, \quad |t\theta_i - y_i - \beta_i| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n)$$

mit ganzen y_i gelöst werden können, ist die Existenz einer zweiten Konstanten $\gamma = \gamma(\theta_1, \dots, \theta_n) > 0$ notwendig und hinreichend, die so beschaffen ist, daß die Ungleichungen

$$\left| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \right| < \varepsilon, \quad 0 < \sum_{i=1}^n |x_i| < \gamma \varepsilon^{-\frac{1}{n-1}}$$

für kein $\varepsilon < 1$ Lösungen in ganzen x_i zulassen.
J. F. Koksma (Amsterdam).

Tchudakoff, N.: On Weyl's sums. *Rec. math. Moscou*, N. s. 2, 17—34 u. engl. Zusammenfassung 35 (1937) [Russisch].

Es sei $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom n -ten Grades mit reellen Koeffizienten.

Für die Summe $S = \sum_{x=1}^X e^{2\pi i f(x)}$ gab I. Vinogradoff (s. dies. Zbl. 13, 200) unter gewissen zusätzlichen Bedingungen eine Abschätzung, die für nicht zu kleines n wesentlich schärfer als die bis dahin bekannten Ergebnisse war. Vinogradoff sieht n als Konstante an. Bei den Anwendungen auf die Primzahltheorie, d. h. auf $\zeta(\sigma + it)$ oder $L(\sigma + it)$ in der Nähe von $\sigma = 1$, wächst aber n mit t ins Unendliche. Demgemäß ist es notwendig, dem Satz und seinem Beweis eine Form zu geben, aus der die Abhängigkeit

der Abschätzungskoeffizienten von n ersichtlich ist. Dies leistet Verf. in der vorliegenden Arbeit mit folgendem Ergebnis: Es sei $n \geq 2$, $0 < |a_n| \leq \exp(-10^5 n^7 \log n)$,
 $\varrho = 10^{-6}(n^7 \log^2 n)^{-1}$, c eine beliebige absolute Konstante, $X \leq c |a_n|^{-\frac{2}{n-1}} = c X_1$.
 Dann gibt es eine absolute Konstante c' , für die

$$(1) \quad |S| \leq \exp(c' n^4 \log n) X_1 |a_n|^c$$

ist. — Der Beweis ist dem Vinogradoffschen nachgebildet, an einigen Stellen allerdings etwas vereinfacht. (1) wandte Verf. bereits mit Erfolg auf die Primzahltheorie an (s. dies. Zbl. 15, 198).

A. Walfisz (Tiflis).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

- { Cassina, Ugo: Teoria dei limiti. III. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 13—30 (1937).
 { Cassina, Ugo: Teoria dei limiti. IV. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 31—48 (1937).

These are the two concluding parts of the author's critical exposition of the theory of limits. (For the first two parts see this Zbl. 16, 296.) The topics treated are: 1. various additional theorems on ordinary limits, chiefly relating to change of variable and limits of composite functions; 2. the sequence definition of limits; and 3. limits defined in terms of order relations. The role of the axiom of choice is pointed out. *Curry*.

Sierpiński, W., et E. Szpilrajn: Sur un ensemble toujours de 1^{re} catégorie de dimension positive. Publ. Math. Univ. Belgrade 5, 117—123 (1936).

Verf. zeigen: Ist die Kontinuumshypothese $\aleph_1 = c$ richtig, so existieren erstens im Euklidischen R_{n+1} eine in jedem Punkt des Raumes n -dimensionale Menge mit der Eigenschaft (λ), zweitens in den Räumen H_0 bzw. H Mengen der Eigenschaft (λ), die in jedem Punkt des Raumes von abzählbarer bzw. unabzählbarer Dimension sind. Weiter wird gezeigt, daß jede Menge nulldimensional ist, wenn sie folgende Eigenschaft (S) hat: Sie hat einen höchstens abzählbaren Durchschnitt mit jeder Menge von verschwindendem Maß μ (= endliche, nichtnegative und absolut additive Funktion Borelscher Mengen eines metrischen Raumes). [Vgl. Mazurkiewicz et Szpilrajn, Fundam. Math. 28, 305—308 (1936); Hilgers, Fundam. Math. 28, 303—304; dies. Zbl. 16, 231].

Nöbeling (Erlangen).

● Denjoy, Arnaud: Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles I et II. (Actualités scient. et industr. Nr. 451 et 452. Ensembles et fonctions. Publiés par Arnaud Denjoy. I./II.) Paris: Hermann & Cie 1937. 55 et 57 pag. Frs. 24.—.

This monograph was originally intended for a larger public, by assumption with slight technical equipment. It was to be one of numerous, similar monographs intended to give interested, intelligent laymen an opportunity for a comprehensive, initial insight into the diversified fields of human knowledge, with special attention to recent results. The present work, as the author points out, has departed from this original purpose. It is now written more abstractly, but repeatedly, particularly in the introduction to the more modern ideas, the tract has an appearance seemingly in keeping with the original design, this by means of historical background, discussion of natural motivation, homely examples from life, connections with Physics, and commentary with reference to significance. There is presupposed a fair knowledge, on the part of the reader, of classical analysis and various parts of algebra. There are no proofs to speak of, but the author now and then discusses the guiding ideas for the proofs. — Part I. Chapter I. Historical sketch, general considerations: Motivation for introducing non-real numbers. Discussion of what functions are natural from the point of view of pure mathematics, of Physics. The significance of the work of Cauchy, Abel and Riemann in laying the foundation for the modern theory of functions; of Weierstrass and Darboux. Cantor, the theory of sets, infinite cardinals, transfinite ordinals. The work of the French school (Borel, Baire, Lebesgue, Denjoy). The Warsaw and Moscow schools (Sierpiński, Lusin, and others). The role of general analysis (in the sense of Fréchet). Chapter II. Geometry of cartesian sets: Descriptive considerations: closed, perfect, derived, exhaustible, residual, connected, scattered; continuous curve, simple arc; Borel, analytic sets. Metric considerations: Jordan, Borel, Lebesgue, Carathéodory, Painlevé measure; metric

density; application to Physics. Chapter III. Principles of the analysis of functions: The considerations are distinguished as purely (doubly) descriptive, purely (doubly) metric, or mixed. Pointwise discontinuity, uniform, semi-, equi-continuity; normal families (Montel); convergence. Theorems of Baire; functions of Baire; Lebesgue's characterization of analytically representable functions. Generalized sums (Cesaro, Borel, Riesz); limited variation; measurable functions; approximate continuity (Denjoy); convergence in the mean; Dini derivatives, theorems of Denjoy; differentials; absolute continuity. Approximation of functions by means of polynomials (Weierstrass, Tchebycheff, S. Bernstein). — Part II. Chapter I. Integration: Guiding ideas for the notion of integral. Integrals of Riemann, Lebesgue, Stieltjes, Young, Denjoy, Perron. Properties of integrals; problem of moments; Denjoy's extension of the notion of absolute continuity (resolvability). Chapter II. Trigonometric series: Historical role in the development of the central problems in Analysis. Calculation of the coefficients (Euler, Fourier, Lebesgue, de la Vallée Poussin, Denjoy); uniqueness (Cantor, Menchoff, Rajchmann, Nina Bary); convergence (Riemann, Dirichlet, Dini, Lebesgue, Gibbs); generalized sums (Cesaro, Abel, Fejer, Lebesgue); properties of the coefficients (Parseval, Young, Szasz, S. Bernstein); absolute convergence (Fatou, Denjoy, Lusin). Multiplication. Orthogonal, biorthogonal functions, connections with integral equations. Chapter III. Quasi-analytic functions: After definitional explanations of quasi-analyticity according to Borel (Bo) and S. Bernstein (Be), the discussion is confined to the former kind. Connection with complex functions. Theorem of Denjoy, proof by Carleman; applications (Mandelbrojt). Chapter IV. Functionals and set functions: Ideas of Volterra and Pincherle; continuity, that of order p ; linear functionals; theorems of Hadamard, Riesz, Fréchet; differentials (Volterra, Fréchet, Gateaux, Levy); problems in functional analysis; integration (Gateaux). Set functions as functionals; complete additivity. Blumberg (Columbus).

● Kestelman, H.: *Modern theories of integration*. Oxford: Clarendon press 1937. VIII, 252 pag. bound 17/6.

Ce livre contient un exposé de la théorie des intégrales de Riemann, de Lebesgue et de Denjoy, avec quelques applications élémentaires à la théorie des séries trigonométriques. Le chap. I est consacré aux notions fondamentales de la théorie des ensembles. Dans le chap. II, l'auteur discute le procédé d'intégration de Riemann, en donnant une interprétation géométrique des intégrales de Riemann, supérieure et inférieure, d'une fonction non-négative comme des mesures de Jordan, extérieure et intérieure, des aires, associées à la fonction de la manière habituelle. Le chap. III contient la théorie de la mesure de Lebesgue suivant la méthode bien connue de Carathéodory. Ce chapitre sert à son tour de point de départ pour la théorie des fonctions mesurables (chap. IV) et pour celle de l'intégrale de Lebesgue des fonctions non-négatives (chap. V). La dernière théorie est basée sur la conception géométrique de l'intégrale, qui est due à Lebesgue et qui a été développée méthodiquement par Carathéodory. Dans le chap. VI cette théorie est étendue aux fonctions de signe variable: en particulier, on y trouve les théorèmes classiques de Lebesgue sur l'intégration terme-à-terme des séries de fonctions. Chap. VII est consacré spécialement à l'intégration des fonctions d'une variable réelle. Le rôle des notions de fonction à variation bornée et de fonction absolument continue est bien mis en évidence. Le même chapitre contient des théorèmes concernant la dérivabilité de l'intégrale indéfinie de Lebesgue. Il s'y trouve p. ex. les résultats classiques de Lebesgue sur la dérivation de l'intégrale indéfinie, le théorème de Fubini sur la dérivation terme-à-terme des séries de fonctions monotones et, d'autre part, les théorèmes sur l'intégration par parties, sur la substitution des variables sous le signe d'intégrale, sur la dérivation d'une intégrale définie par rapport à un paramètre etc. Le chap. VIII contient le théorème classique de Fubini sur la réduction d'une intégrale double. Dans le chap. IX l'auteur donne un exposé de la théorie de l'intégrale de Denjoy au sens large, basée sur la définition sans nombres transfinis qui s'inspire des idées de la théorie «descriptive» de Denjoy et de Lusin et qui a été formulée explicitement par Romanovsky. On y trouve le théorème fondamental d'après lequel chaque fonction partout dérivable est une intégrale indéfinie (D) de sa dérivée (cependant la notion de dérivée approximative, plus caractéristique peut-être pour l'intégrale de Denjoy au sens large que la notion de dérivée ordinaire, n'est pas mentionnée par l'auteur). Le chap. X contient des applications aux séries de Fourier: en particulier, les critères de convergence de Dini et de Jordan, le théorème sur l'intégration des séries de Fourier, les théorèmes de Riesz-Fischer et de Parseval. — Grâce à la clarté et au caractère élémentaire de l'exposé, le livre constitue bien un véritable manuel moderne de la théorie de l'intégrale. Saks (Warszawa).

Appert, Antoine: *Sur la mesure presque isométrique*. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 509—511 (1937).

Cette note contient quelques propriétés d'une mesure (extérieure), satisfaisant aux quatre conditions connues de Carathéodory et définie pour chaque ensemble

d'un espace distancié compact non vide. Elle est presque isométrique à d et toute isométrie (transformation ponctuelle biunivoque conservant les distances) qui transforme un ensemble ouvert O en un ensemble O^* conserve la mesure de chaque ensemble $E \subset O$.

J. Radder (Groningen).

Appert, Antoine: Remarques sur l'extension d'un ensemble. Bull. Soc. math., II. s. 61, 223—234 (1937).

Dans un mémoire antérieur, concernant la théorie d'une mesure isométrique dans les espaces distanciés (Bull. Soc. math. 60, ce Zbl. 15, 497), l'auteur a introduit un nombre $n(E, r) =$ le plus grand entier n tel qu'il existe n points de l'ensemble E dont toutes les distances mutuelles soient $\geq r (> 0)$. Deux ensembles E et F ont, d'après l'auteur le même ordre d'extension si et seulement si le rapport $\frac{n(E, r)}{n(F, r)}$ ainsi que son inverse ont un sens et restent bornés quand le nombre positif r tend vers zéro. Dans les espaces euclidiens l'ordre d'extension se réduit à l'ordre au sens de Cantor. Minkowski (introduit par G. Bouligand, voir p. e. Bouligand, Les définitions modernes de la dimension, 1935, p. 39—41). Il est invariant dans ces espaces par rapport à un groupe de transformations (nommées ici «dilatations»), dont on mentionne encore quelques autres invariants.

J. Radder (Groningen).

Analysis.

Longley, W. R.: An example of a continuous function with finite discontinuities in its second derivative. Amer. Math. Monthly 44, 467—470 (1937).

Jardetzky, W.: Sur la généralisation de l'intégrale de Stieltjes donnée par Liapounoff. Publ. Math. Univ. Belgrade 5, 84—91 (1936).

Cette note contient des considérations sur quelques extensions de l'intégration d'après Stieltjes donnée par Liapounoff en 1904. Une de ces extensions est la suivante: si dans l'intervalle (a, b) $f(x)$ est une fonction monotone et finie, $\alpha(x)$ une fonction discontinue telle qu'il existe une fonction $\alpha^*(x)$ continue pour laquelle la différence $\alpha(x) - \alpha^*(x)$ se réduit à une constante, alors la limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot [\alpha^*(x_i) - \alpha^*(x_{i-1})]$ [avec $a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < x_n = b$ et $\delta =$ le maximum des $(x_i - x_{i-1})$] définira dans (a, b) une intégrale de Liapounoff de $f(x)$ par rapport à $\alpha(x)$. Radder.

Copeland, A. H.: A new definition of a Stieltjes integral. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 581—588 (1937).

$f(x)$ sei für $a < x \leq b$ monoton, $f(b) - f(a+) = 1$. Wie von Mises gezeigt hat, gibt es Folgen $\{x_k\}$ aus (a, b) derart, daß, wenn H_n die Anzahl der x_k mit $k = 1, \dots, n$ bezeichnet, die in irgendein Teilintervall $\alpha < x \leq \beta$ von (a, b) fallen, stets $f(\beta+) - f(\alpha+) = \lim H_n/n$ ist. Ist dann $g(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, so definiert Verf. $\int_a^b g(x) df(x) = \lim \{g(x_1) + \dots + g(x_n)\}/n$. Für stetige $g(x)$ stimmt diese Definition mit der des Riemann-Stieltjes-Integrals überein.

W. Feller (Stockholm).

Montel, Paul: Sur quelques propriétés des différences divisées. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 219—231 (1937).

This paper is closely related to a previous one by the author [Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 1, 371—384 (1932); this Zbl. 5, 290]. — Consider repeated "divided differences"

$$d_k f(z_0) = \frac{f(z_k) - f(z_0)}{z_k - z_0}, \quad d_1 d_2 f = d_1 [d_2 f], \quad d_1 d_2 d_3 f = d_1 [d_2 (d_3 f)], \dots, d_1 d_2 \dots d_p f(z_0),$$

where the $p+1$ distinct points z_0, z_1, \dots, z_p (eventually coincident) lie in the domain D of definition of $f(z)$. Various representations of $d_1 d_2 \dots d_p f$ are given: as ratio of two determinants — that of Vandermonde and one closely related to it; as multiple

integral, and, most important of all, in terms of $f^{(p)}(z) - f(z)$ being assumed holomorphic in D —, taken at a certain point ξ in the domain of convexity S_p corresponding to the set of values Σ_p taken by $f^{(p)}(z)$, for $z \in D$. (Some of these representations are given in Nörlund's book "Differenzenrechnung", 1923, pp. 9, 16; Ref.). The latter representation is used in order to obtain various extensions of the mean value-theorem (Weierstrass, Darboux, Jensen, Curtiss, et al.). The case of D convex yields a result in the theory of multivalent functions. — Special discussion is devoted to the following question: what choice of the above points z_0, z_1, \dots, z_p assures for $f(z)$ the validity of the mean-value theorem ($p = 1$), as stated for real variables, or its extension for any p , and where lies the above point ξ . J. Shohat (Philadelphia).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Walsh, J. L.: Maximal convergence of sequences of harmonic polynomials. Ann. of Math., II. s. 38, 321—354 (1937).

In this paper the notion of the maximal convergence for sequences of harmonic polynomials is introduced. It is very much similar to the corresponding notion for polynomials of a complex variable developed by the author in various papers and in his recent Colloquium Publication. The fundamental result is as follows. Let $u(x, y)$ be defined in a Jordan region C and the harmonic polynomials $p_n(x, y)$ of respective degrees n such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \text{ on } C} |u(x, y) - p_n(x, y)|^{\frac{1}{n}} = \varrho^{-1} < 1.$$

Then $\{p_n\}$ converges uniformly on every closed set interior to the "level curve" C_ϱ defined by $G(x, y) = \log \varrho$; here $G(x, y)$ is the Green's function of the exterior of C with pole at infinity. Furthermore the function $u(x, y)$ can be extended harmonically to the interior of C_ϱ . On the other hand let $u(x, y)$ be harmonic in C ; the upper bound R of the numbers ϱ [choosing for $\{p_n\}$ all possible sequences of harmonic polynomials] has then the following property. The function $u(x, y)$ is regular interior to C_R but not in $C_{\varrho'}$, where $\varrho' > R$. An extension of these and related considerations is given if C is replaced by a finite set of mutually exterior Jordan regions and also for integral approximations of various kinds. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Gurewitsch, L.: Über die Konvergenz im Mittel biorthogonaler Reihen. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 327—336 u. dtsh. Zusammenfassung 336—338 (1937) [Russisch].

Soit donnée une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions linéairement indépendantes, complète dans l'espace de fonctions de carrés sommables. Pour que la suite $\{f_n\}$ converge fortement dans l'espace L^2 il faut et il suffit que l'on ait

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ii}^n = a_{ii},$
- (b) $\sum a_{ii}^2 / \varphi_{ii}^{ii} < \infty,$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum (a_{ii}^n)^2 / \varphi_{ii}^{ii} = \sum a_{ii} / \varphi_{ii}$

où les nombres $a_{m,i}^n$ désignent les coefficients de la meilleure approximation quadratique de la fonction f_n par les combinaisons linéaires de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, $\varphi_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j dx$; $\varphi_{ii}^{ij} = D_m^{ij} / D_m$, où D_m désigne le déterminant de Gram de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ et D_m^{ij} son sous-déterminant correspondant à l'élément φ_{ij} . L'auteur applique ce résultat à la théorie de séries biorthogonales. Marcinkiewicz (Wilno).

Reihen:

Ludwig, Rudolf: Theorie der monotonen Streckenzüge und ihre Anwendung auf komplexe Reihen. Dresden: Diss. 1937. 75 S. u. 21 Fig.

Es wird eine geometrische Methode zur Untersuchung komplexer Reihen $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ entwickelt. Stellt man die Teilsummen $A_n = \sum_{v=0}^{n-1} a_v$ durch Punkte der komplexen

Zahlenebene dar, so entsteht eine Punktfolge A_0, A_1, A_2, \dots ; die Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Punkte bilden einen Streckenzug, dessen n -te Strecke durch $A_{n+1} - A_n = a_n = r_n e^{i\varphi_n}$ gegeben ist. Ein solcher Streckenzug heißt monoton, wenn sich sowohl die Längen r_n der Strecken als auch die Winkel $\varphi_n = \angle A_{n-1} A_n A_{n+1} = \pi + \varphi_{n-1} - \varphi_n$ ($-\pi < \varphi_n < \pi$) aufeinanderfolgender Strecken monoton ändern und überdies $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ ($0 \leq r < \infty$) sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \psi$ ($-\pi < \psi < +\pi$) gilt. Zu jedem monotonen Streckenzug läßt sich (wie Verf. in Anlehnung an einen Vortrag von P. E. Böhmer zeigt) eine Folge äußerer Hüllkreise konstruieren: der n -te Kreis dieser Folge ist der kleinste Kreis, in dem die auf die n -te Strecke $A_n A_{n+1}$ folgende Fortsetzung des Streckenzugs auf Grund seiner Monotonieeigenschaft (r, ψ fest) verlaufen muß. Dazu gibt es im Falle $r > 0$ eine Folge innerer Hüllkreise: der n -te innere Hüllkreis ist der größte im n -ten äußeren Hüllkreis enthaltene Kreis, in den die auf $A_n A_{n+1}$ folgende Fortsetzung des Streckenzugs nicht eindringen kann. Der Kreisring zwischen dem n -ten äußeren und dem n -ten inneren Hüllkreis stellt genau das Gebiet dar, dessen Punkte mit beliebiger Annäherung durch passende Fortsetzung des zugrunde gelegten Streckenzugs über $A_n A_{n+1}$ hinaus unter Aufrechterhaltung der Monotonieforderung (r, ψ fest) erreicht werden können. Für $n \rightarrow \infty$ streben die Hüllkreise gegen einen Kreis vom Radius $\frac{r}{2 \cos \psi/2}$, den Grenzkreis (der für $r = 0$ in einen

Punkt ausartet). — Diese Ergebnisse werden für die Untersuchung komplexer Reihen nutzbar gemacht. Liefert die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ einen monotonen Streckenzug, so liegen die Häufungsstellen der Teilsummen A_n auf dem Grenzkreis, die Reihe ist $(H, 1)$ -summierbar und ihre $(H, 1)$ -Summe wird durch den Mittelpunkt des Grenzkreises dargestellt. Strebt insbesondere $r_n \rightarrow 0$, so findet Konvergenz statt und $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ stimmt mit dem Grenzpunkt der äußeren Hüllkreise überein. Diese Tatsachen sind von Bedeutung für die praktische Berechnung guter Näherungswerte der Summe einer Reihe, sowohl im Falle der Konvergenz als auch der $(H, 1)$ -Summierbarkeit der Reihe. Das dafür entwickelte Verfahren ist auch übertragbar auf Reihen, die nach Hölderschen Mitteln höherer Ordnung summierbar sind. Die Ergebnisse werden an speziellen Reihen (Potenzreihen, Zetareihe, trigonometrischen Reihen usw.) erläutert. — Im letzten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß sich die geometrischen Eigenschaften der „spiralenartigen“ monotonen Streckenzüge auch teilweise auf wirkliche Spiralen übertragen lassen.

F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Szász, Otto: On the partial sums of certain Fourier series. Amer. J. Math. 59, 696—708 (1937).

Let $a_v \geq 0$, $v = 0, 1, 2, \dots$, $b_v \geq 0$, $v = 1, 2, \dots$; let $\sum_1^{\infty} v^{-2} a_v < \infty$, $\sum_1^{\infty} v^{-1} b_v < \infty$.

Then $R_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{\sin vx}{vx} \right)^2 a_v$, $R_2(x) = \frac{2x}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\sin vx}{vx} \right)^2 v b_v$ exist for $x > 0$. Further-

more, if $\liminf_{x \rightarrow 0} R_1(x) = M$ then $\frac{1}{2} a_0 \leq M$, $\left| \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_v \cos vx \right| \leq M$ for $|x| < \pi$,

$n = 1, 2, \dots$, while if $R_2(x) \leq 2M/\pi$ in $0 < x \leq \delta$, then $\sum_1^n v b_v \leq \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} M n < 1,38 M n$

for $n \geq \alpha/\delta$ where α is the unique root of the equation $2\alpha = \tan \alpha$ in $0 < \alpha < \pi/2$. These results represent an improvement upon the previous results due to Paley, Fejér, Fekete, and the author himself. Analogous results can be obtained also for partial sums of expansions of almost-periodic functions.

J. D. Tamarkin.

Foà, Alberto: Sulla serie coniugate delle serie di Legendre. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 71—83 (1937).

Analog of Lukács' theorem for trigonometric Fourier series: Let $f(x) (1-x^2)^{-1/4}$

$\in L(-1, 1)$, let $f(x)$ have a discontinuity of the first kind with saltus d at $x = x_0$, $-1 < x < 1$, and let $S_n^*(x)$ be the n -th partial sum of the conjugate series

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(x)$$

of the Fourier-Legendre series of $f(x)$, then $S_n^*(x_0)/\log n \rightarrow d/\pi$. — There is an annoying misprint in formula (11)₁ where the exponent on the right hand side should be $\frac{1}{2}$ instead of $\frac{1}{4}$. E. Hille (New Haven, Conn.).

Sansone, G.: Sulla sommabilità di Cesaro delle serie di Laplace. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 75—81 (1937).

L'A. démontre le théorème suivant: La somme (C, μ) , $\mu > \frac{1}{2}$, d'une série de Laplace d'une fonction sommable converge vers cette fonction presque partout. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Spezielle Funktionen:

Clapp, M. M.: Four place table of the Bessel function. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 16, 76 (1937).

Shabde, N. G.: On series of Jacobi-polynomials and definite integrals involving Bessel functions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 6, 119—121 (1937).

The author obtains several results by integration of known expansion of products of Bessel functions. For example, from Bateman's expansion he obtains the formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\Phi) = \frac{(\cos^2 \varphi \cos^2 \Phi - \sin^2 \varphi \sin^2 \Phi)^{\beta-\alpha-1}}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\beta-\alpha) (\cos \varphi \cos \Phi)^{2\beta}}$$

if $\cos \varphi \cos \Phi > \sin \varphi \sin \Phi$,

and the series has a zero sum if $\cos \varphi \cos \Phi < \sin \varphi \sin \Phi$. From another expansion he obtains the formula

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\nu(z \cos \theta) J_\nu(z \sin \theta) \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^{\nu+2r} \frac{2^{\nu+2r-1}}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \frac{\Gamma\{\frac{1}{2}(\nu+p+2r+1)\} \Gamma\{\frac{1}{2}(\nu+q+2r+1)\}}{\Gamma\{\frac{1}{2}(2\nu+p+q+4r+2)\}} J_{\nu+2r}(z)$$

where $R(\nu) > -1$.

W. N. Bailey (Manchester).

Varma, R. S.: Extensions of some self-reciprocal functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 269—275 (1937).

Verf. hat früher gezeigt, daß einige Webersche Funktionen als unendliches Integral derselben Weberschen Funktion, multipliziert mit Besselschen, Exponentialfunktionen und Potenzen dargestellt werden können. Diese Beziehungen werden jetzt erweitert. Es handelt sich dabei um die Berechnung unendlicher Integrale, wobei der Integrand ein Produkt der genannten Form ist. Die Beziehungen gelten für Ordnungszahlen der Weberschen Funktionen, deren reeller Teil eine Ungleichung erfüllt. Verf. untersucht sie für verschiedene Werte der Ordnungszahl. Aus einer allgemeinen Grundformel werden eine Anzahl von Spezialfällen abgeleitet, wobei trigonometrische Funktionen in die Integranden eingehen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Göllnitz, Erich: Über die Gaußsche Darstellung der Funktionen \sin lemn x und \cos lemn x als Quotienten unendlicher Produkte. Deutsche Math. 2, 417—420 (1937).

Die Gaußschen Tagebuchaufzeichnungen von 1797, betreffend die Produktdarstellung gewisser meromorpher doppelperiodischer Funktionen können leicht vervollständigt werden, wenn die Ergebnisse von Liouville und Weierstraß bekannt sind; Bereinigung einiger Ungenauigkeiten.

Wilhelm Maier (Greifswald).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Hostinský, B.: Le problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 230, 1—12 u. franz. Zusammenfassung 11—12 (1936) [Tschechisch].

Le présent travail contient des remarques au sujet de la méthode d'approximations successives dans le cas du problème de Cauchy relatif aux systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre. Cette méthode, convenablement modifiée, s'applique aux équations intégrodifférentielles. *O. Borůvka* (Brno).

Mordoukhay-Boltovskoy, D.: Sur quelques applications de la théorie analytique des équations différentielles à l'intégration en forme finie. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 53—65 (1937).

The author obtains some results on the form of the solutions of certain differential equations by combining the researches of Liouville with those on the nature of the singularities. *Raudenbush* (New York).

Bompiani, Enrico: Sur la normalisation des équations différentielles linéaires. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 18, 64—68 (1936).

Résumé du Mémoire de l'A. publié dans Ann. Sci. Univ. Jassy 23, 75 (1937); ce Zbl. 15, 403. Cfr. aussi Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 807 (1936); ce Zbl. 15, 17. *Beniamino Segre* (Bologna).

Franceschi, Odoardo: Studio sulle equazioni ai differenziali totali illimitatamente integrabili dal punto di vista di Painlevé. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 132—138 (1936).

Condition nécessaire et suffisante pour que tous les points critiques (algébriques) des solutions de l'équation aux différentielles totales $dz = M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy$ soient fixes: $M = A + Bz + Cz^2$, $N = D + Ez + Fz^2$.

$A \dots F$ étant des fonctions analytiques de x, y . (Analogie au théorème de Painlevé pour l'équation de Riccati.) *Janczewski* (Leningrad).

Siddiqi, Raziuddin: Sur quelques séries infinies des intégrales. Bull. Soc. Math. France 65, 53—63 (1937).

Es seien λ_n, φ_n Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen Problems $(pu')' + \lambda u = 0, u(0) = u(\pi) = 0$. Dann werden Sätze der folgenden Art ausgesprochen: Sind $l_1 \geq 1, l_2 \geq 1, \dots, l_\mu \geq 1$ ganze Zahlen und r beliebig ganz, dann

konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{r-1} |f_n|}{(\lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \dots \lambda_{l_\mu})^r}$, wo $f_n = \int_0^\pi \varphi_{l_1}(x) \varphi_{l_2}(x) \dots \varphi_{l_\mu}(x) \varphi_n(x) dx$ ist. Offen-

sichtlich bedarf es noch einer Einschränkung von r . *Rellich* (Marburg, Lahn).

Grassi, Luigi: Moto libero smorzato dei sistemi a due gradi di libertà. Ann. Mat. pure appl., IV. s. 16, 107—125 (1937).

Es sei $f(s) = 0$ die charakteristische Gleichung der auf einen Vektor $q = (x, y)$ bezüglichen Differentialgleichung $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$ mit konstanten zweireihigen Matrixkoeffizienten A, B, C . Unter der Annahme, daß A, B, C symmetrisch und positiv definit sind, werden die verschiedenen Fälle von reellen oder komplexen Wurzeln der reellen Gleichung $f(s) = 0$ vierten Grades besprochen. *Wintner* (Baltimore).

Kamenkoff, G.: Sur la stabilité du mouvement dans un cas particulier. Sbornik nauč. tr. Av. Inst. Kasan Nr 4, 3—18 (1935) [Russisch].

Le cas considéré est le suivant: toutes les racines de l'équation caractéristique ont leurs parties réelles négatives, sauf deux racines nulles aux diviseurs élémentaires distincts. Les seconds membres supposés analytiques, le système peut être réduit à la forme:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, x_1, \dots, x_n), \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik} x_k + X_i(x, y, x_1, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

Y et X_i ne contenant pas de termes du premier degré et les racines de l'équation $\|p_{i,k} - \lambda E\| = 0$ ayant leurs parties réelles négatives. Soit $Y = Y_0(x, y) = Y_1$, $X_i = X_{i0}(x, y) + X_{i1}$, chaque terme de Y_1 et X_{i1} contenant les x_i en facteur; $Y_0 = f_0(x) + y f_1(x) + \dots$, $X_{i0} = f_0^{(i)}(x) + y f_1^{(i)}(x) + \dots$, $f_0 = a_0 x^{a_0} + \dots$, $f_1 = a_1 x^{a_1} + \dots$. Il s'agit de la stabilité de la solution $x = y = x_1 = \dots = x_n = 0$. Le cas $n = 0$ a été résolu par Liapounoff. — Par des transformations analytiques des variables on parvient à trois cas: I. $f_0 = f_1 = \dots = f_\mu \equiv 0$, $f_0^{(i)} = \dots = f_\mu^{(i)} \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Instabilité. II. $f_0 = f_0^{(i)} \equiv 0$, $f_1 \neq 0$; α_1 impair, $a_1 < 0$ donne stabilité, instabilité dans tous les autres cas. III. $f_0 \neq 0$; α_0 impair, $a_0 > 0$ stabilité; α_0 impair, $a_0 < 0$, α_1 impair $< \alpha_0$; alors pour $a_1 > 0$ on a stabilité, pour $a_1 < 0$ instabilité. Les autres cas donnent lieu à l'instabilité ou bien se trouvent ramenés à la question de la stabilité pour une seule équation aux coefficients périodiques — question résolue par Liapounoff. — La méthode consiste dans la construction des fonctions V de Liapounoff (cf. p. ex. Malkin, ce Zbl. 2, 417) et des fonctions de Četajev (ce Zbl. 9, 66).

W. Stepanoff (Moskau).

Kuzmin, P.: Über die Verteilung singularer Punkte der Differentialgleichungen der Dynamik. Sbornik nauč. tr. Av. Inst. Kasan Nr 5, 28—38 (1936) [Russisch]. Verf. betrachtet das Hamiltonsche System

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

im Punkte P , wo die ersten Ableitungen von H verschwinden. Das ist ein kritischer Punkt der Funktion H (s. z. B. Morse, Calculus of variations in the large, S. 143—144); die Signatur der Form $d^2 H$ in P sei σ , und der Index (Anzahl der negativen Quadrate) sei m . Es besitzen andererseits die Gleichungen (*) in P die charakteristischen Exponenten

$\pm \kappa_1, \dots, \pm \kappa_r, \pm i\nu_1, \dots, \pm i\nu_m, \pm \lambda_1 \pm i\mu_1, \dots, \pm \lambda_s \pm i\mu_s, r + m + 2s = n$, $\kappa, \nu, \lambda, \mu$ sind reell, $\neq 0$. Die linearen Glieder von (*) lassen sich in eine Normalform bringen, wobei insbesondere in der Gruppe

$$\frac{dh_j}{dt} = \nu_j g_j, \quad \frac{dg_j}{dt} = -\nu_j h_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

das Vorzeichen von ν_j eindeutig durch die Bedingung: Poissonsche Klammer $(h_k, g_k) = 1$ bestimmt wird; die Anzahl der positiven ν sei p . Dann ergibt sich: $\sigma = 4p - 2m$, $k = n + m - 2p$. Die Morsesche Aufzählung der Indizes von kritischen Punkten in gewissen Bereichen gibt also einige Informationen über den Charakter der Singularitäten von (*) in diesen Bereichen.

W. Stepanoff (Moskau).

Malkin, J.: Über die Stabilität der Bewegung im Sinne von Liapounoff. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 437—439 (1937).

Es wird das System betrachtet:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n + X_s, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

wo X, Y, X_s Potenzreihen nach x, y, x_s sind, die keine Glieder 0. und 1. Ordnung enthalten; ihre Koeffizienten sowie die p_{sk} sind stetige und beschränkte Funktionen von $t, 0 \leq t < \infty$; ferner existieren drei quadratische Formen $W(t, x_s), W_1(x_s), W_2(x_s)$,

W_1, W_2 positiv definit, so daß $W \geq W_1, \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_s} (p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n) \leq -W_2$

ausfällt. Gefragt wird nach der Stabilität der Lösung $x = y = x_s = 0$. Es seien X^0, Y^0, X_s^0 die Ausdrücke, die sich ergeben, wenn man $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$ in X, Y, X_s setzt und $X^{(m)}, Y^{(m)}$ die Glieder der niedrigsten Dimension in X^0, Y^0 ; es wird vorausgesetzt, daß $X^{(m)}, Y^{(m)}$ konstante Koeffizienten besitzen und daß die X_s^0 keine Glieder der Dimension $< m$ enthalten. Man bilde zwei Formen: $G(x, y) = xY^{(m)}(x, y) - yX^{(m)}(x, y), P(x, y) = xX^{(m)}(x, y) + yY^{(m)}(x, y)$. Ist G nicht definit und kann P bei $G = 0$

positive Werte annehmen, so ist die Lösung unstabil; wenn dagegen für $G = 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$, P positiv ausfällt, ist die Lösung stabil. Ist G definit, so betrachtet der Verf. die Größe $\lambda = \int_0^{2\pi} P(\cos \vartheta, \sin \vartheta) / G(\cos \vartheta, \sin \vartheta) \cdot d\vartheta$; für $\lambda \neq 0$ ist die Bewegung für $\lambda G < 0$ asymptotisch stabil, für $\lambda G > 0$ unstabil. Der Fall $\lambda = 0$ wird für die von t unabhängigen (oder nach t periodischen) rechten Seiten der Gleichungen untersucht. Verf. bildet die formell den partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial x_s}{\partial x} X + \frac{\partial x_s}{\partial y} Y = p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n + X_s$ ($s = 1, 2, \dots, n$) genügenden Reihen $x_s = \sum_{i+h \geq m} A_s^{(i,h)} x^i y^h$ und setzt dieselben in zwei erste Gleichungen ein; er sucht das Integral der so gewonnenen Gleichungen in Polarkoordinaten in der Form: $V = r^2 \varphi_2(\vartheta) + 2r^3 \varphi_3(\vartheta) + \dots$; φ_2 und φ_3 sind notwendig periodisch; ist φ_h der erste nichtperiodische Koeffizient, der der Gleichung $F = 0$ genügt, so gibt es eine Konstante g , so daß die Lösungen der Gleichung $F = g$ periodisch sind; wenn $g > 0$, ist die Bewegung labil, wenn $g < 0$, so ist sie asymptotisch stabil. — Im Fall konstanter Koeffizienten besitzt das betrachtete System n Wurzeln der charakteristischen Gleichung des linearen Systems mit negativen reellen Teilen, während zwei Wurzeln $= 0$ mit verschiedenen Elementarteilern sind. Die Beweise werden in einer anderen Sammlung publiziert. *Stepanoff*.

Vessiot, Ernest: Sur l'application de la théorie des faiseaux de transformations infinitésimales à l'étude des transformations des systèmes différentielles. (*Athènes, 2.—9. IX. 1934.*) Actes Congr. Interbalkan. Math. 43—50 (1935).

The author considers sets of infinitesimal transformations $X_\alpha = \xi_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ and their invariants. He proves by means of such sets the well known theorem of Bäcklund viz. if a transformation T preserves contact of the m -th order between hypersurfaces then T is an extended contact transformation in the sense of Lie. Another application is to the theorem that if T preserves contact between two dimensional varieties of a four dimensional space, then T is necessarily an extended point transformation. This last result is a special case of a general easily proved theorem viz. if T preserves contact between m -dimensional varieties of an $(n+1)$ -dimensional space then T is an extended point transformation except when $m = n$; in that case it may be a contact transformation. *M. S. Knebelman* (Princeton).

Saltykow, Nikolas: Étude sur l'application des transformations de contact à l'intégration d'équations différentielles. Publ. Math. Univ. Belgrade 5, 133—156 (1936).

Soit $F(x, y, y') = 0$ (1) une équation différentielle ordinaire. Supposons que l'on connait une transformation de contact, soit $\Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$, $\partial \Phi / \partial x + y' \partial \Phi / \partial y = 0$, $\partial \Phi / \partial x_1 + y'_1 \partial \Phi / \partial y_1 = 0$, transformant les variables x, y, y' en x_1, y_1, y'_1 de manière que, l'équation transformée $y_1 = f(x_1)$ soit indépendante de y'_1 . La formule $\Phi[x, y, c, f(c)] = 0$ définit alors l'intégrale générale de l'équation (1) et les relations $\Phi[x, y, c, f(c)] = 0$, $\partial \Phi / \partial c + f'(c) \partial \Phi / \partial f = 0$ en donnent l'intégrale singulière. Cette méthode d'intégration, basée, on le voit, sur la connaissance d'une transformation de contact changeant l'équation différentielle donnée dans une équation fonctionnelle, s'étend aux systèmes de m équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes. *O. Borůvka* (Brno).

Cimmino, Gianfranco: Su una proprietà di media relativa alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine. Rend. Semin. mat. Roma IV. s. 1, 304—309 (1937).

L'aut. considère l'équation linéaire générale du type elliptique, dans le cas de deux variables indépendantes, et il fait des hypothèses qui entraînent l'existence de l'opération adjointe. Pour cette équation, il introduit une des fonctions dont l'idée première remonte à E. E. Levi, et qui permettent de généraliser la théorie du potentiel. Il applique la formule de réciprocité à cette fonction et à une solution de l'équation considérée, dans un domaine qui dépend du point par rapport auquel il n'intègre pas,

et sur la frontière duquel la fonction de Levi est nulle. C'est cette formule que l'aut. considère comme une généralisation du théorème de la moyenne, relatif aux fonctions harmoniques. L'aut. esquisse des raisonnements d'après lesquels cette formule caractérise les solutions de l'équation du type elliptique. *Georges Giraud.*

Jaekel, Karl: Über die Bestimmung maximaler Eigenwerte bei gewissen Randwertaufgaben. Breslau: Diss. 1937. 36 S.

Carleman, T.: Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 88, 119—132 (1936).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 12, 70) hat der Autor das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen der schwingenden Membran in einer Weise ermittelt, die von der Weyl-Courantschen Behandlungsweise wesentlich verschieden ist. Hier wird mit ähnlicher Methode der folgende Satz bewiesen: Die zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen Eigenwerte λ_n der elliptischen, nicht notwendig selbstadjungierten Differentialgleichung

$$L(u) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_{pq}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{p=1}^3 a_p(x) \frac{\partial u}{\partial x_p} + a(x) u = -\lambda u$$

mit reellen Koeffizienten sind in unendlicher Anzahl vorhanden und genügen der asymptotischen Relation

$$\lambda_n \sim \frac{1}{6\pi^2} \left[\iint_D \frac{1}{\sqrt{\Delta(x)}} d\omega_x \right]^{-2} \cdot n^{\frac{2}{3}},$$

falls die λ_n nach nichtabnehmenden Absolutbeträgen oder nichtabnehmenden Realteilen geordnet sind; $\Delta(x)$ bedeutet die Determinante $|a_{pq}(x)|$, $d\omega_x$ das Volumenelement des Grundgebietes D . Die Hauptpunkte des Beweises sind diese: 1. Für eine Integralgleichung mit dem Kern $K(x, y)$ und den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ gilt

$$\frac{1}{\lambda} \int_D \Gamma_1(x, x; \lambda) d\omega_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}(\lambda_{\nu} - \lambda)}; \text{ hierin steht } x, y \text{ für } x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m,$$

und $d\omega_x$ bedeutet das Volumenelement; $\Gamma_1(x, y; \lambda) = \Gamma(x, y; \lambda) - K(x, y)$, wobei Γ die Resolvente von K ist. — 2. Es gelingt das asymptotische Verhalten der Funktion

$$f(-r) = -\frac{1}{r} \int_D \Gamma_1(x, x; -r) d\omega_x \text{ für } r \rightarrow \infty \text{ anzugeben, wobei als Kern } K(x, y) \text{ jetzt}$$

die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u) - \lambda^2 u = 0$ (mit Randbedingung $u = 0$) genommen wird. Außerdem läßt sich zeigen, daß die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von $L(u) + \lambda u = 0$ alle innerhalb einer Parabel $\eta^2 = k(\xi - \xi_0)$, $k > 0$, liegen, wo ξ, η die Koordinaten eines Punktes in der λ -Ebene bedeuten (das ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Geppert). — 3. Es gilt der Satz (Beweis soll demnächst veröffentlicht werden): Es seien λ_r reelle oder komplexe Größen, die innerhalb des Gebietes

$$|\eta| \leq C(\xi - \xi_0)^{\beta}, \quad \xi \geq \xi_0, \quad C > 0, \quad 0 < \beta < 1$$

liegen. Es sei ferner die Reihe $f(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\lambda_{\nu} - r}$, wo $a_{\nu} \geq 0$, für $r < \xi_0$ konvergent.

Es bedeute $S(r)$ die Summe aller a_{ν} , für welche die Realteile der zugehörigen λ_{ν} -Werte $< r$ sind, d. h. $S(r) = \sum_{R(\lambda_{\nu}) < r} a_{\nu}$. Dann folgt aus $f(-r) \sim \frac{A}{r^{\alpha}}$ ($0 < \alpha < 1$) für $r \rightarrow \infty$ die asymptotische Darstellung

$$S(r) \sim \frac{A \sin(\pi\alpha)}{\pi} r^{1-\alpha} \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

4. Dieser Satz liefert in wenigen einfachen Schritten das Resultat; dabei wird für $f(r)$ die in 2. erklärte Funktion $f(r)$ gewählt, für λ_{ν} die in 1. erklärten Eigenwerte, für a_{ν} die reziproken Realteile der λ_{ν} . *Rellich (Marburg, Lahn).*

Groth, Erich: Untersuchungen zur Theorie linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Leipzig: Diss. 1936. 35 S.

Hadamard hat in seinem zusammenfassenden Werk „Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques“, S. 415, Paris 1932 die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für eine normal hyperbolische Differentialgleichung mit nichtanalytischen Koeffizienten im Falle einer geraden Anzahl von unabhängigen Variablen nur auf dem Umweg über seine „méthode de descente“, also durch Einführung einer zusätzlichen unabhängigen Variablen bewerkstelligt; den Fall einer ungeraden Variablenzahl tut er ebenda S. 437 mit der Bemerkung ab, daß man diese Methode noch einmal anwenden solle. — Demgegenüber gibt Verf. in seiner Dissertation eine direkte Behandlung der Gleichungen mit nichtanalytischen Koeffizienten, indem er (bei einer geraden Anzahl von unabhängigen Variablen) eine von Hadamard, loc. cit. S. 316, und auch von Friedrichs, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1927, 172, für analytische Koeffizienten entwickelte Methode durchzuführen weiß allein unter Verwendung einer Grundfunktion (Parametrix), die das Problem auf eine Integralgleichung zurückzuführen gestattet. Diese Grundfunktion ist ein Abschnitt in der für analytische Koeffizienten gültigen Hadamardschen Entwicklung der Grundlösung, dessen Existenz nur gewisse Differenzierbarkeitsannahmen erfordert. Bei einer ungeraden Variablenzahl bedarf die Grundfunktion noch weiterer Modifikationen. — Analoge Betrachtungen folgen für das charakteristische und das gemischte Problem. Die Darstellung ist auch insofern gegenüber Hadamard vereinfacht, als sie dessen Integrationssymbol \iiint vermeidet, d. h. durch ganz geläufige Operationen ersetzt.

E. Hölder (Leipzig).

Hadamard, J.: Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques. J. Chin. Math. Soc. 2, 6—20 (1937).

Unter einer „Seite“ der Berandung eines ebenen Bereiches werde ein Kurvenbogen verstanden, längs dessen x und y monoton sind, unter einer „Ecke“ der gemeinsame Punkt zweier „Seiten“. (Eine Ellipse ist in diesem Sinne ein Viereck.) Verf. gibt eine ausführliche elementare Untersuchung der sehr vielgestaltigen Fälle bei Zwei-, Drei- und Vierecken, in welchen die Dirichletsche Randwertaufgabe für $u_{x,y} = 0$ unlösbar, eindeutig oder vieldeutig wird. Bei Vierecken werden in gewissen Fällen merkwürdigerweise arithmetische Eigenschaften ausschlaggebend. W. Feller.

Chaundy, T. W.: Partial differential equations with constant coefficients. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 280—288 (1937).

Die Riemannsche Integrationsmethode wird auf Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten ausgedehnt. v. Koppenfels (Würzburg).

Tonolo, Angelo: Integrazione con quadrature di una classe di sistemi di equazioni a derivate parziali del prim'ordine della fisica matematica. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1, 310—339 (1937).

Eine Verallgemeinerung von früheren Untersuchungen des Verf. (s. dies. Zbl. 15, 111 u. 16, 28). Hier handelt es sich um ein System von n linearen homogenen Gleichungen zwischen den n unbekannten Funktionen $\varphi_h(x_1, \dots, x_m, t)$ und deren ersten Ableitungen nach den x_i und t ; vorausgesetzt wird die Existenz von n homogenen Linearkombinationen der linken Seiten und deren ersten Ableitungen nach den x_i und t , die sich auf $\Delta_2 \varphi_h - \varphi_{ht} + \alpha \varphi_h$ ($h = 1, 2, \dots, n$) reduzieren. Die Ergebnisse sind denen der obengenannten Arbeiten ganz ähnlich. G. Cimmino.

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Erdős, P., and J. Gillis: Note on the transfinite diameter. J. London Math. Soc. 12, 185—192 (1937).

It is proved that a linear closed pointset is of capacity zero if its logarithmic measure is finite. Previously known was only that the capacity is zero if the logarithmic measure vanishes. The proof is elementary. Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Brelot, Marcel: Sur les meilleures et plus petites majorantes harmoniques des fonctions sous-harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 456—457 (1937).

Suite d'une note récente (ce Zbl. 16, 395). Une question qui terminait cette note, et qui avait une solution unique en ce qui concerne la plus petite majorante harmonique h^* , a aussi une solution unique en ce qui concerne la meilleure majorante harmonique \bar{h} . Autres résultats, dont un montre que \bar{h} ne dépend que des valeurs prises par la fonction sous-harmonique donnée aux points réguliers de la frontière. Un autre énoncé dépend d'une proposition de Vasilescu, proposition contredite récemment par Keldych et Lavrentieff (ce Zbl. 16, 402). Georges Giraud.

Keldyš, M., et L. Sedov: Sur la solution effective de quelques problèmes limites pour les fonctions harmoniques. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 16, 7—10 (1937).

L'article contient les solutions explicites (fonctions algébriques et quadratures) des problèmes suivants: 1. Déterminer une fonction $\omega(z)$ régulière pour $\Im z < 0$, telle

que $\int_{-i}^z \omega(z) dz$ reste bornée au voisinage de l'axe réel; sur les segments $a_k b_k$ de l'axe réel ($-\infty < a_1 < b_1 < \dots < b_n = b_0 < +\infty$) sont données les valeurs de $\Re \omega(z)$, sur $b_{k-1} a_k$ celles de $\Im \omega(z)$. La solution contient $n+1$ constantes réelles arbitraires; on peut les déterminer en imposant p. ex. à $\omega(z)$ la condition d'être finie dans les a_k et de s'annuler à l'infini. 2. Le domaine D_n est obtenu en soustrayant du plan les segments $a_k b_k$; $\omega(z)$ est uniforme dans D_n , s'annule à l'infini, $\int \omega(z) dz$ reste bornée au voisinage des $a_k b_k$, $\Im \omega(z)$ prend les valeurs assignées sur les deux bords des coupures. On réduit ce problème au premier. 3. Le problème de Dirichlet pour D_n (les valeurs limites sont supposées dérivables). 4. Le problème de Neumann pour le même domaine.

W. Stepanoff (Moskau).

Smaliekij, Kh.: Sur les fonctions de Le Roy, H. Poincaré et V. Stekloff. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 16, 3—6 (1937).

Poincaré a considéré le système des potentiels de simple couche vérifiant sur la surface S les conditions: $\frac{dV_{k1}}{dn} = \alpha_k \frac{dV_{k2}}{dn}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Le système de Le Roy vérifie les conditions: $\frac{dV_{k1}}{dn} - \frac{dV_{k2}}{dn} = \xi_k \varphi V_k$, $\varphi > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$; ce système est complet sur S . Si S est une sphère ou un ellipsoïde, les deux systèmes coïncident pour $\varphi = \varrho$ (densité de la couche électrostatique). Contrairement à une assertion de Le Roy l'auteur démontre qu'en général les deux systèmes sont distincts et ne coïncident que si la surface vérifie pour tout couple des points (0) et (1) la condition $\varrho(0) \frac{\cos(r_{10} n_1)}{r_{10}^2} - \varrho(1) \frac{\cos(r_{01} n_0)}{r_{01}^2} = 0$ (qui ne peut être satisfaite que pour des surfaces convexes). Les fonctions de Stekloff vérifient sur S les conditions: $\frac{dV_{k1}}{dn} = \lambda_k \varphi V_k$, $\varphi > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Si deux quelconques des trois systèmes coïncident, le troisième leur est identique.

W. Stepanoff (Moskau).

Waldmann, Ludwig: Zwei Anwendungen der Sommerfeldschen Methode der verzweigten Potentiale. Physik. Z. 38, 654—663 (1937).

Das erste vom Verf. behandelte Problem betrifft den Kreisplattenkondensator: zwei ebene parallele, unendlich dünne, leitende Kreisplatten. Analog der aus der Funktionentheorie geläufigen Vorstellung der Riemannschen Fläche kann man einen verzweigten Raum bilden. Als einfachstes Problem in einem solchen verzweigten Raum behandelt Verf. das Analogon zu dem Newtonschen Potential einer Kugel. Hieraus wird die Greensche Funktion gebildet, und durch Anwendung der Spiegelungsmethode gelangt man zur Greenschen Funktion einer Halbebene. Von der Greenschen Funktion der Halbebene kommt man zur Greenschen Funktion der Kreisscheibe durch eine Transformation mittels reziproker Radien. Durch diese Greensche Funktion der Kreisscheibe ist das physikalische Problem der Ladungsverteilung auf

einer ebenen leitenden Kreisscheibe, der auf der Achse eine Punktladung gegenüberliegt, gelöst. Beim Übergang zum Kreisplattenkondensator wird der Abstand der Kreisplatten zunächst sehr groß gegenüber dem Radius einer Platte angenommen. In diesem Fall wird die Potentialverteilung in der Umgebung der einen Platte nur wenig von der Potentialverteilung abweichen, wobei die zweite Platte durch eine in der Achse gelegene Punktladung ersetzt wird. Verf. berechnet unter diesen Annahmen die Ladungsverteilung auf einer Kreisplatte. Die Ladungsverteilung im wirklichen Falle des Kondensators wird aus diesem Elementarfall durch sukzessive Näherung erhalten. Verf. berechnet aus dieser Näherungslösung die Potentialverteilung auf der Achse zwischen den Kreisplatten und stellt diese durch eine Kurve dar. Als zweites Problem behandelt Verf. eine Vereinfachung des elektronenoptischen Emersionsobjektivs: Im endlichen Abstand vor einer Kreisscheibe befinden sich zwei Kreisinge vom selben Radius, während in großem Abstand auf derselben Seite wie die Ringe die Anode angeordnet ist. Die Ringe seien unendlich dünn. Auf Grund des Vorhergehenden ist es möglich, das Potential auf der Achse zu berechnen, wenn nur ein Ring vorhanden ist. Durch Überlagerung der Beiträge, welche die Ringe liefern, erhält man angenähert den Gesamtpotentialverlauf. Verf. stellt diesen Verlauf für verschiedene Verhältnisse in Kurven dar. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

Klose, A.: Zur Integration der ballistischen Gleichung. Deutsche Math. 2, 473—479 (1937).

Zur schrittweisen graphischen Integration der ballistischen Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = g(r) + w(v, r, t) \quad (1)$$

beschreibt Verf. eine Verallgemeinerung einer Methode von Vahlen (Artill. Mh. 1918, 145). Ist das Zeitintervall t_0, t_1 genügend klein gewählt, so daß man

$$g = \text{konst.} \quad \text{und} \quad w = w_0 + \dot{w}(t - t_0) \quad (2)$$

mit konstantem w_0, \dot{w} setzen darf, so wird der neue Geschwindigkeitsvektor $v_1 = v(t_1)$ durch ein Iterationsverfahren (der Vahlensche Vektor v_1^* dient als erste Näherung) und dann durch Quadratur $r_1 = r(t_1)$ bestimmt. Verf. gibt eine bequeme graphische Konstruktion für dieses Iterationsverfahren, wobei die Geschosßbahn als eben angesehen wird. Im Fall, daß die Genauigkeit des Ansatzes (2) nicht ausreicht, muß man

zur Bestimmung des bei einmaliger Integration von (1) auftretenden Integrals $\int_{t_0}^{t_1} w dt$ die auf Vektoren übertragene Besselsche Interpolationsformel heranziehen, um auch dann mittels eines Iterationsverfahrens die neuen Vektoren v und r zu erhalten.

Collatz (Karlsruhe).

Leray, Jean, et Louis Robin: Complément à l'étude des mouvements d'un liquide visqueux illimité. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 18—20 (1937).

In einer früheren Arbeit (Zbl. Mech. 3, 81) hat Leray die Untersuchungen von Oseen (Hydrodynamik. Leipzig 1927) über die Existenz von Lösungen der Navier-schen Differentialgleichungen fortgesetzt. In dieser ergänzenden Note werden einige neue Fälle mitgeteilt, wo die Bewegung einer reibenden Flüssigkeit, welche den ganzen Raum erfüllt, in einem gewissen Zeitintervall regulär bleibt. *T. Gustafson (Lund).*

Okaya, Tokiharu: Note sur le mouvement du fluide parallèle à l'axe d'un cylindre solide et sur le phénomène de Liesegang. Jap. J. Physics 12, 9—25 (1937).

In both cases a quantity v must be found so as to satisfy the equation of heat conduction in polar co-ordinates (r, θ) and the supplementary conditions $v = F(\theta)$ for $r = r_0$, $t > 0$, $v = 0$ for $r > r_0$ and $t = 0$. The solution is obtained with the aid of the function

$$\Phi_n(x) = (2\pi x) e^{-x} I_n(x)$$

associated with the Bessel function $I_n(x)$. The properties of this function are listed and a short table is given for $n = 0, \frac{1}{2}, 1$ and $3/2$. — Use is made also of the character-

istic function $Z(x)$ of the probability integral which is defined by the equation $E(x) Z(x) = \int_x^\infty E(t) dt$. It has the properties $Z'(x) = xZ(x) - 1$, $Z^{(n)}(x) = xZ^{(n-1)}(x) + (n+1)Z^{(n-2)}(x)$ $n \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} Z(x) = (\pi/2)^{\frac{1}{2}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} Z(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} Z'(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} Z'(x) = 0$. — The author's method of solving the differential equation is thought to be more direct than that based on the use of a Green's function. *H. Bateman (Pasadena).*

Tierey, G.: Sur une équation différentielle rencontrée dans un problème d'aérodynamique. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 19) 54, 32—34 (1937).

On the assumption that the pressure p is connected with the density ρ and the absolute temperature T by a gas law of type $p = R\rho T$ where R is independent of position and time the author derives the equation

$$\operatorname{div} V = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\log p + \frac{d}{dt} \log T \right) + \frac{1}{RT} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - V \cdot F \right],$$

where V is the velocity of a particle of air and F is the body force per unit mass (acceleration of gravity). He replaces $\frac{d}{dt}$ by $\frac{\partial}{\partial t}$ in the term depending on the temperature and discusses an attempt to obtain a check of the equation by means of observational data at stations around Zürich. He concludes that $\operatorname{div} V$ varies very rapidly and that its instantaneous value is hard to observe. *H. Bateman (Pasadena).*

Knight, R. C., and B. W. McMullen: The potential of a screen of circular wires between two conducting planes. Philos. Mag., VII. s. 24, 35—47 (1937).

This is a continuation of Knight's previous work (see this Zbl. 12, 94). Use is made of potential functions of types

$$V = -\log(r/2d) + \sum_{n=0}^{\infty} {}_0A_n(r/2d)^n \cos n\theta,$$

$$V_s = (2d/r)^s \cos s\theta + \sum_{n=0}^{\infty} {}_sA_n(r/2d)^n \cos n\theta.$$

The evaluation of the coefficients presents much difficulty but in the symmetrical case the difficulties are overcome with the aid of a large amount of numerical work. The results are shown graphically. *H. Bateman (Pasadena).*

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Eidelheit, M.: Sur les systèmes d'équations linéaires à infinité d'inconnues. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 206—208 (1937).

Es sei (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots$) ein Gleichungssystem mit beschränkten Zeilen $\{a_{1k}\}, \{a_{2k}\}, \dots$, wobei $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$ ist. Verallgemeinertes Reduktionsprinzip: Ist für gegebene η_i das System (1) lösbar und löst man die n ersten Gleichungen von (1), indem man entsprechend die Unbekannten $\xi_{k_1^{(n)}}, \xi_{k_2^{(n)}}, \dots, \xi_{k_n^{(n)}}$ wählt ($k_r^{(n)}$ sind im allgemeinen von $\{\eta_i\}$ abhängig) und die übrigen ξ_r gleich Null setzt, so konvergiert die n -te Lösung für $n \rightarrow \infty$ nach einer Lösung von (1). Für spezielle $\{a_{ik}\}$ ist $k_i^{(n)} = i$ (auch in Fällen, wo $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^p < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{\frac{p}{p-1}} < \infty$; $p > 1$). Für eindeutige und immer lösbare Systeme (1) gilt das gewöhnliche Reduktionsprinzip. *Schauder.*

Highberg, I. E.: A note on abstract polynomials in complex spaces. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 307—314 (1937).

Let E be an "espace algébrophile" [see Fréchet, J. Math. pures appl., IX. s. 8,

71—92 (1929)] with the complex number system as the associated number system, then an everywhere Gateaux differentiable function $p(x)$ on E to E is a polynomial of degree n in the sense of Fréchet if and only if it satisfies an identity of the form

$$p(x + \mu y) = \sum_{j=0}^n a_j(x, y) \mu^j \text{ with } a_n(x, y) \neq 0. \quad N. \text{ Dunford (New Haven).}$$

Michal, A. D., and E. W. Paxson: The differential in abstract linear spaces with a topology. C. R. Soc. Sci. Warsaw **29**, 106—121 (1937).

1. Ausführliche Darstellung einer C. R.-Note, über die bereits referiert wurde (dies. Zbl. **14**, 118). 2. Verff. beschäftigen sich auch mit Funktionen der reellen Variable, deren Werte den von ihnen betrachteten linearen topologischen Räumen L angehören. Für diese Funktionen werden die Ableitung und das Riemannsche Integral definiert.

Schauder (Lwów).

Funktionentheorie:

Pompeiu, D.: Quelques remarques sur les polynômes à une variable complexe. Rev. math. Union Interbalkan. **11**, 187—189 (1937).

Es wird ein zweiter elementarer Beweis des in dies. Zbl. **14**, 406 angeführten Satzes gegeben und es werden einige weitere Bemerkungen gemacht bezüglich einer für Polynome charakteristischen Funktionalgleichung. *Karamata (Beograd).*

Cinquini, Silvio: Sopra un'estensione di una formula di Curtiss. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **70**, 236—248 (1937).

$f(z)$ sei in der Umgebung von $z = 0$ regulär analytisch. Ferner sei $f''(0) \neq 0$. Dann gibt es einen Kreis $|z| < r$ derart, daß für irgendzwei Punkte z_0, z_1 mit $z_0 + z_1 = 0$, $|z_i| < r$,

$$\frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1} = f'(\zeta)$$

gilt, wobei $|\zeta| \leq |z_0| = |z_1|$ ist (Curtiss). Die Schranke hängt jedoch von f ab. Verf. betrachtet Verallgemeinerungen auf höhere Differenzenquotienten. Betreffs des genauen Wortlautes derselben sei auf die Arbeit verwiesen. *E. Hopf (Leipzig).*

Cisotti, U.: Sul comportamento al contorno di notevoli integrali analitici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 175—179 (1936).

Verf. untersucht das Verhalten des Integrals $\int \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - j_1)^{n+1}}$, wenn j_1 gegen einen regulären Punkt der Randkurve s strebt. [$f(z)$ ist im Innern von s regulär.] Das Integral wird unendlich von n -ter Ordnung für n ungerade und von $(n - 1)$ -ter Ordnung für n gerade. *Weinstein (Paris).*

Hössjer, Gustav: Bemerkung über einen Satz von E. Lindelöf. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. **6**, 22—29 (1937).

Es sei T ein von einer Jordankurve S begrenztes offenes Gebiet und a und P zwei Punkte von S . S_1 und S_2 seien die Teile, in welche S durch a und P zerlegt wird. $f(z)$ sei eine in T beschränkte, regulär analytische Funktion, welche noch auf S stetig ist, außer vielleicht in a . Nach einem bekannten Satz von Lindelöf gilt dann folgendes: Wenn $f(z)$ für $z \rightarrow a$ längs S_1 und S_2 je einen Grenzwert hat, so sind diese beiden Grenzwerte gleich, und $f(z)$ nähert sich diesem Grenzwert gleichmäßig für $z \rightarrow a$ in T . — Statt der Grenzwerte betrachtet nun der Verf. die Häufungswerte von $f(z)$ für $z \rightarrow a$ und beweist folgendes: Es sei Ω_1 bzw. Ω_2 dasjenige Kontinuum, das von den Häufungswerten von $f(z)$ auf S_1 bzw. S_2 und etwaigen von diesen Häufungswerten begrenzten beschränkten Bereichen gebildet wird. Dann haben Ω_1 und Ω_2 einen gemeinsamen Punkt. Die Häufungswerte von $f(z)$, wenn $z \rightarrow a$ in beliebiger Weise in T , gehören zu der Vereinigungsmenge von Ω_1 und Ω_2 . Es gibt ferner einen solchen, P und a in $T + S$ verbindenden Jordanbogen S' , daß die Häufungswerte von $f(z)$ für $z \rightarrow a$ auf S' zum Durchschnitt Ω von Ω_1 und Ω_2 gehören. Wenn speziell T ein

Kreis ist und Ω aus einem einzigen Punkte b besteht, so hat $f(z)$ den Wert b als Grenzwert für $z \rightarrow a$ längs dem Radius. V. Paatero (Helsinki).

Ganapathy, Iyer, V.: A property of the zeros of the successive derivatives of integral functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 289—294 (1937).

D'après un résultat dû à S. Takenaka [Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 14 (1932); ce Zbl. 6, 63] une fonction entière d'ordre un et de type $A < \lg 2$, dont toutes les dérivées successives s'annulent dans le cercle $|z| < 1$, se réduit à zéro identiquement. L'auteur démontre que la même conclusion est valable pour les fonctions paires ou impaires de type $A < \lg(2 + \sqrt{3})$. — Extension analogue d'un théorème de S. Kakeya (ce Zbl. 4, 346). W. Gontcharoff (Moscou).

Ganapathy Iyer, V.: A note on integral functions of order one. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 103—106 (1937).

Let $\lambda_n \uparrow \infty$ be a measurable sequence of density D and index of condensation δ , $0 \leq \delta < \infty$ (for this terminology see V. Bernstein, Séries de Dirichlet, Borel Monogr. 1933, 22—27). Let $f(z)$ be an entire function of order one, $k(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log M(r, f)$, $\lambda(\theta, f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \log |f(re^{i\theta})| r^{-1}$. Then, if $f(z)$ is not identically 0, $k(f) \geq d \equiv \min(\pi D, \alpha - 2\delta)$ or $k(f) \geq \pi D$, according as $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} \log |f(\lambda_n)| = -\alpha < 0$ or $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} \log |f(\pm \lambda_n)| = -\alpha < 0$, $\alpha > \delta$. J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Blanc, Charles: Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes. Comment. math. helv. 9, 193—216 et 335—368 (1937).

Die reichhaltigen Untersuchungen des Verf. gehen nach drei ziemlich unabhängigen Richtungen: Erstens gibt er eine Klasse von Beispielen gebrochener Transzendenten an, die Riemannsche Flächen mit etwas allgemeineren Arten von Randstellen erzeugen, als sie in der Iversenschen These (Helsingfors 1914) explizit hergestellt worden sind. Wenn auch einige dieser Beispiele wie das Prinzip ihrer Erzeugung schon länger bekannt sind, so ist die Zusammenstellung des Verf. vollständiger. Zweitens untersucht Verf. die Streckenkomplexe Riemannscher Flächen mit endlich vielen Windungsorten und verallgemeinert ihre Anwendbarkeit zunächst auf Flächen, deren Windungs- und Randstellen zu je zweien einen Abstand nicht unter einer festen Strecke haben, dann vermöge eines Ausschöpfungsverfahrens auf noch allgemeinere Flächenklassen. Die Untersuchungen des Verf. über den Einfluß der Zerschneidungskurve (die durch die Spuren den Windungsorten gelegt wird und die Ebene in 2 Stücke zerlegt, mit deren Hilfe nach dem Streckenkomplex ein „Halbblattaufbau“ der Fläche erfolgt) auf die Streckenkomplexdarstellung berühren sich mit einer Arbeit von E. Drape, die dem Verf. unbekannt geblieben ist [Deutsche Math. 1, 805—824 (1936); dies. Zbl. 16, 81]; die Untersuchungen sind dort viel breiter angelegt und enthalten alle einschlägigen Ergebnisse des Verf. als Sonderfälle eines „Kalküls mit Streckenkomplexen“, der es erlaubt, die Änderungen des Komplexes zu verfolgen, wenn die Fläche festgehalten, die Zerschneidungskurve aber schrittweise abgeändert wird. Drittens beschäftigt sich der Verf. mit dem Typenproblem der Riemannschen Flächen. Er bestätigt in einem bemerkenswerten Sonderfall das etwas vage principe de continuité topologique von Bloch, das vielfach schöne Anregungen geboten hat, aber keine Beweisprinzipien einschließt. Zwei Flächen seien topologisch so aufeinander abgebildet, daß zwei Punkte mit dem Abstand d Bilder mit dem Abstand d' haben: Bleibt dann $d : d'$ für alle Punktpaare zwischen positiven Grenzen, so haben beide Flächen denselben Typus. Eine ähnliche Aussage kann für Flächen gegeben werden, deren Komplex mit dem einer (ganzen) periodischen Funktion zusammenfällt, aber im Sinne der Verallgemeinerungen des Verf. (Verschiebungen von Windungspunkten aus festen Sorten über fremden Gebieten) verstanden werden darf. Dann wird ein bekanntes Typenkriterium Nevanlinnas verallgemeinert [Comment. math. helv. 5, 95—107 (1933);

dies. Zbl. 6, 65], welches den Grenzpunktfall bei Flächen sichert, die nur über $q = 3$ Grundpunkten logarithmisch verzweigt sein dürfen; einerseits bezieht sich die Verallgemeinerung auf die Zulässigkeit von Verschiebungen der log. Windungspunkte über 3 fremden Scheiben — ohne jedoch so allgemein zu werden, wie es beim Dreischiebensatz von Ahlfors zulässig ist, der auch die einzelnen log. Windungspunkte noch zu zerlegen gestattet (dies. Zbl. 3, 407; 8, 262); andererseits bezieht sie sich auf $q > 3$ und betrifft hier einen Satz von Wittich [Mh. Math. Phys. 44, 85—96 (1936); dies. Zbl. 15, 70]. Ferner gibt Verf. einige Typenkriterien für das Eintreten des Grenzpunktfalls bei Flächen, deren Komplex mit dem von e^z verwandt (oder identisch) ist. Den Schluß bildet eine ganz neuartige Betrachtung: Eine (einfach-zusammenhängende) Riemannsche Fläche sei durch eine (analytische) Schnittkurve T in zwei Stücke zerlegt, die in die obere bzw. untere Halbebene abgebildet werden mögen. Zugeordneten Uferpunkten von T entsprechen nun Punktpaare x_1, x_2 auf der reellen Achse, und diese genügen einer Gleichung $H(x_1, x_2) = 0$. Umgekehrt kann von einer solchen Beziehung $H = 0$ aus rückwärts eine Riemannsche Fläche definiert werden. Verf. fragt nun nach Typenkriterien von $H = 0$ aus; er zeigt, daß z. B. alle Flächen grenzpunktartig sind, die zu algebraischen Gleichungen $H = 0$ gehören; er kann aber umgekehrt auch Beispiele zum Grenzkreisfall beibringen, die von dem Gedanken ausgehen, den Einheitskreis spiralig durch Kurven zu zerlegen, die ihn selbst zum Grenzykel haben.

Ullrich (Gießen).

Golusin, G. M.: Über die Verzerrung bei schlechter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 37—63 u. dtsh. Zusammenfassung 63—64 (1937) [Russisch].

Let R be an arbitrary simply or multiply connected region of finite connectivity in the ζ -plane containing the point $\zeta = \infty$ and let $\{F\}$ be the family of all functions univalent and regular in R except for $\zeta = \infty$, where $F(\infty) = \infty$ and $F'(\infty) = 1$. In the special case that $\zeta = 0$ is contained in R , we assume that $F(0) = 0$. Consider an arbitrary interior point $\zeta = z$ of R and the set of values of the expressions

$$\log F'(z), \quad \log \frac{F'(z)}{F(z)}, \quad \log F(z), \quad F(z), \quad \frac{F''(z)}{F'(z)},$$

when $F(\zeta)$ is any function of $\{F\}$. The author determines the exact domain of values of each of these expressions. The domains for the last two expressions are found under a slight additional assumption. They are all circles. Some of these domains had previously been determined by H. Grötzsch (this Zbl. 4, 299) and H. Grunsky (this Zbl. 5, 362—363). The author uses essentially Grunsky's method in a considerably simplified form. From the general results the author deduces a variety of interesting inequalities for special regions R . Thus, to take only one of many examples, let R be the region $|\zeta| > 1$ and let $f(\zeta)$ be any univalent function in $|\zeta| > 1$ regular except at $\zeta = \infty$, where $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$. Then, for any $|z| > 1$

$$4 \frac{|z| + 1}{|z| - 1} \frac{E\left(\frac{2\sqrt{|z|}}{|z| + 1}\right)}{K\left(\frac{2\sqrt{|z|}}{|z| + 1}\right)} - \frac{4|z|^2 + 2}{|z|^2 - 1} \leq \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2}{|z|^2 - 1},$$

where

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx.$$

These inequalities are sharp. It follows from this that all circles $|\zeta| > r$ for $r > 1,78\dots$ are mapped on convex regions. Using some of the above results the author gives a new proof of the existence of functions which map a given region of connectivity n conformally and in a one-to-one manner on a plane which is cut along n arcs of logarithmic spirals of the same inclination. The proof has some points of similarity with those given by H. Grötzsch (this Zbl. 5, 68—69) and R. de Possel (this Zbl. 3, 314).

W. Seidel (Providence, R. I.).

Fritsch, Wilhelm: Über konvexe und schlichte Abbildungen von Kreisbereichen. Deutsche Math. 2, 421—445 (1937).

Reproduces a dissertation (due to Rosenthal) of the year 1932. The introduction gives an account with references of work in the subject previous to this date. § 1 considers the function $z + 2z^2$. § 3 extends the usual theory for a schlicht function $w = f(z) = z + \dots$ to the p -valent function $w = z^p + \dots$. Polynomials and in particular the class $z^p + az^n$ ($n > p$) are treated in §§ 4 and 5. The radius of the circle in which $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ is necessarily schlicht under assumptions such as $|f'(z)| > \varrho$, $|f(z)| < M$ is obtained to various degrees of accuracy which are compared numerically.

Macintyre (Aberdeen).

Manià, Basilio: Condizioni per la quasi analiticità delle funzioni periodiche. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 205—220 (1937).

S. Bernstein et de la Vallée Poussin ont donné des conditions suffisantes pour que la classe des fonctions $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $|a_k| < e^{-\psi(k)}$, $|b_k| < e^{-\psi(k)}$, soit quasi-analytique. M. Mandelbrojt a montré que la divergence

de l'intégrale $\int \frac{\psi(k)}{k^2} dk$ est aussi nécessaire et suffisante pour la quasi-analyticité, si l'on suppose que $k\psi'(k) \rightarrow \infty$ avec k . L'A. démontre que cette condition est aussi nécessaire même si si l'on ne suppose rien sur ψ' . Il démontre aussi qu'en posant

$\omega(k) = \sup_{h \geq 0} (k+h)\psi'(k+h)$, la condition $\int \frac{\omega(k)}{k} dk = \infty$ est déjà suffisante pour la quasi-analyticité de la classe.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Martin, W. T.: Special regions of regularity of functions of several complex variables. Ann. of Math., II. s. 38, 602—625 (1937).

Jeder im Ursprung regulären Funktion $f(w, z) = \sum_{m,n} a_{mn} w^m z^n$ werden die ganzen Funktionen (Borelsche Transformierte)

$$F(w, z; p, q) = \sum \frac{a_{mn} w^m z^n}{(pm + qn)!}; \quad p, q \text{ ganz und positiv}$$

zugeordnet. Das Wachstum jeder dieser Transformaten auf den analytischen Flächen

$$w = w_0 \tau^p, \quad z = z_0 \tau^q; \quad \tau \text{ komplexer Parameter,}$$

wird durch eine nichtnegative Funktion $H(w, z; p, q)$ gemessen (analog wie bei den ganzen Funktionen einer Veränderlichen). Der Bereich $H < 1$ fällt zusammen mit dem Cartanschen (p, q) -Bereich der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$f(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p+q=n} a_{mn} w^p z^q \right\}.$$

Dann werden durch die Wachstumseigenschaften der Funktion bestimmte, den (p, q) -Bereich umfassende Bereiche regulären Verhaltens von $f(w, z)$ untersucht, insbesondere der B_{pq} -Bereich Borelscher Summierbarkeit. In B_{pq} wird eine neue Integraldarstellung von $f(w, z)$ gewonnen. — Schließlich werden Bereiche, die analog den Mittag-Lefflerschen Sternbereichen sind, betrachtet.

Behnke (Münster i. W.).

Oka, Kiyosi: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables II. Domaines d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ. A 7, 115—130 (1937).

In der vorangegangenen Arbeit (vgl. dies. Zbl. 15, 309) hatte Verf. bewiesen, daß in jedem Bereich des Raumes der z_1, \dots, z_n , der konvex in bezug auf rationale Funktionen ist, die Aussage Cousin I (das ist die Übertragung des Mittag-Lefflerschen Satzes) gilt. Daraus wird in der vorliegenden Arbeit geschlossen, daß die Aussage Cousin I auch richtig ist für jeden schlichten, endlichen Regularitätsbereich. Henri Cartan hatte vorher gezeigt [C. R. 199 (1934); s. dies. Zbl. 10, 309], daß die Aussage Cousin I im Raume der z_1, z_2 höchstens für Regularitätsbereiche richtig sein kann. — Zum Beweise (des neuen Satzes) wird \mathfrak{B} von innen durch Bereiche \mathfrak{B}_m :

$|g_j^{(m)}(z_1, \dots, z_n)| \leq 1$; $g_j^{(m)}$ regulär in \mathfrak{B} ; $j = 1, \dots, s$, approximiert. Jedem \mathfrak{B}_m wird im Raume der $2(n+s)$ Dimensionen das analytische Flächenstück Σ_m : $w_j = g_j(z_1, \dots, z_n)$; (z_1, \dots, z_n) aus \mathfrak{B}_m zugeordnet. \mathfrak{B}_m wird von außen durch Polynombereiche approximiert. Aus der Lösung für den Polynombereich wird eine Lösung für Σ_m , daraus für \mathfrak{B}_m und schließlich für \mathfrak{B} konstruiert. *Behnke.*

Ciorănescu, N.: Sur la représentation des fonctions analytiques de plusieurs variables réelles. Bull. Soc. Math. France **65**, 41–52 (1937).

Eine Funktion $f(x, y)$ der reellen Veränderlichen x, y bezeichnet man in einem Punkte regulär, falls sie sich in der Umgebung dieses Punktes in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Der Verf. gibt nun eine neue Darstellung solcher Funktionen. Führt man nämlich Polarkoordinaten r, θ ein, so erhält man durch Umformung

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\leq \frac{n}{2}} r^{2k} Q_{n-2k}^{(n)}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} \sum_{n=2k}^{\infty} Q_{n-2k}^{(n)}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} u_k(r, \theta),$$

wo $Q_{n-2k}^{(n)}$ harmonische Polynome und $u_k(r, \theta)$ harmonische Funktionen sind. Für diese Entwicklung erhält man eine Reihe von Eigenschaften wie für die übliche Taylorentwicklung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen. Der Verf. beweist, daß zu jeder Funktion f eine einzige Entwicklung der angegebenen Art existiert, daß sie gleichmäßig und absolut in jedem Kreise konvergiert, in welchem $\sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\theta)$ dies

tut. $u_k(r, \theta)$ bezeichnet der Verf. als die harmonischen Koeffizienten von f und den Ausdruck $\mathfrak{M}(r, f) = \sum M_n(r) r^{2n}$ als Pseudomodul oder harmonische Majorante von f , wenn $|u_k(r, \theta)| \leq M_k(r)$ gilt. — Ist nun für jedes R $\mathfrak{M}(R, f) R^{-m}$ beschränkt, so ist f ein Polynom höchstens m -ten Grades. — Für die harmonischen Koeffizienten existiert

eine Integraldarstellung, es ist nämlich $u_k(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} \frac{f^{(n+2k)}(0, \alpha)}{(n+2k)!} \cos n(\theta - \alpha) d\alpha$;

woraus man erhält: $u_k(0, 0) = \frac{(\Delta^k f)_{x=y=0}}{2^{2k}(k!)^2}$. — Es lassen sich analoge Entwicklungen für analytische Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen angeben. *Bergmann.*

Ciorănescu, Nicolas: Sur les fonctions analytiques de deux variables réelles. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **38**, 63–70 (1936).

Im Anschlusse an seine vorstehend referierte Arbeit beweist der Verf.: Es ist $M\left(\frac{R}{3}\right) \leq 480 \mathfrak{M}(r, f)$, worin $M(r)$ das Maximum des Betrages für $|z_k| \leq r$ der analytischen Fortsetzung $F(z_1, z_2)$ von $F(x, y)$ ins Komplexe bedeutet. Der Beweis dieses Satzes wird durch direkte Rechnung gegeben, unter Benutzung einer Abschätzung von S. Bernstein für Koeffizienten eines Polynoms n -ten Grades mit Hilfe seines Absolutbetrages. (Der Satz und der Beweis stammen von P. Montel.) — Jede ganze analytische Funktion f ist eine harmonische Funktion unendlicher Ordnung. (So bezeichnet man mit N. Aronszajn [dies. Zbl. **12**, 262] Funktionen, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sqrt[n]{|\Delta^n u|} = 0$ ist, und ähnliche Beziehungen für die ersten Ableitungen gelten.) Ist f in C_R ($r \leq R$) analytisch, so ist, wie der Verf. zeigt, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sqrt[n]{|\Delta^n f(r, \varphi)|} \leq \frac{4c}{d^2 e^2}$, $d = R - r$, $e = 2,71 \dots$, c geeignete Konstante. — Diese Abschätzung folgt mit Hilfe geeigneter Rechnungen aus der Existenz von $\mathfrak{M}(r, f)$. — Schließlich gibt der Verf. für die ganzen analytischen Funktionen f die Integraldarstellung in einem Gebiete D :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_C \left[\frac{\Delta^k f}{(2^k k!)} \frac{\partial H_{k+1}}{\partial n} - H_{k+1} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\Delta^k f}{(2^k k!)} \right] ds,$$

wo C die Randkurve von D , und H_k , $k = 1, 2, \dots$, eine Art von Greenschen Funktionen bedeuten. (Sie ist nur ein Spezialfall der von N. Aronszajn für die harmonischen Funktionen unendlicher Ordnung gegebenen Integralformel.) *Bergmann.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

● **Le Myre, Georges: Le baccara.** Paris: Hermann & Cie 1935. 204 pag. Frs. 12.—

In elementarster Weise werden die beim Baccaraspiel vorkommenden Fälle eingehend durchdiskutiert, die günstigsten Spielregeln in Kursiv und Versen zusammengefaßt. Mathematisch wird das Buch nur als Beispielsammlung zur kombinatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung interessieren können.

W. Feller (Stockholm).

Onicescu, Octav, et Gh. Mihoc: L'allure asymptotique de la somme des variables d'une chaîne de Markoff discontinue. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 481—482 (1937).

Soit x_k la variable aléatoire attachée à la $k^{\text{ième}}$ expérience dans une chaîne de Markoff et p_{ik} la probabilité pour que $x_n = a_k$ étant donné que $x_{n-1} = a_i$. La fonction caractéristique de la variable $x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\theta$ (où θ est la limite de la valeur moyenne de x_n pour n infini) peut être exprimée sous la forme

$$A_k(t) \lambda_1^n(t) + \sum_r^p B_{k,r}(t) \lambda_r^n(t) + \sum_{p+1}^m C_{k,s}(n, t) \lambda_s^n(t)$$

$\lambda_s(t)$ étant les racines de l'équation

$$\|p_{hk} - \delta_{hk} e^{i(\theta - a_k)t}\lambda\| = 0, \quad \delta_{hh} = 1, \quad \delta_{hk} = 0, \quad h \neq k;$$

on suppose que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_1(t) = 1$; $|\lambda_r(t)| = 1$ sans que $\lambda_r(t) = 1$ (pour $r = 2, 3 \dots p$).

Les auteurs trouvent que la fonction de répartition de la variable

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\theta}{\sqrt{-\lambda_1''(0) \cdot n}}$$

est celle de Laplace.

B. Hostinsky (Brno).

Neyman, J.: Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 236, 333—380 (1937).

Es sei aus theoretischen Gründen bekannt, daß die Gesamtheit von n beobachteten Werten (X_1, \dots, X_n) einer Größe eine stochastische Veränderliche X bildet, deren Verteilungsfunktion differenzierbar und von der Form $F(x; \vartheta_1, \dots, \vartheta_l)$ ist, mit bestimmten festen Werten der ϑ_k , die uns jedoch unbekannt sind; man will aus einem gegebenen X etwa ϑ_1 abschätzen. Zur Behandlung dieses Grundproblems der „statistical estimation“ macht Verf. einen neuen und interessanten Ansatz, der sich hauptsächlich durch folgendes auszeichnet: Benutzt wird nur die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung (in der Kolmogoroffschen Fassung), so daß nur durch $F(x; \vartheta_1, \dots, \vartheta_l)$ berechenbare Wahrscheinlichkeiten auftreten; der unbekannte Wert von ϑ_1 wird nicht als stochastische Veränderliche, sondern als Konstante behandelt (weshalb etwa die übliche Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß $\vartheta_1 \geq 2$ wird, ausscheidet); schließlich führt der Ansatz nicht auf eine Zahl für ϑ_1 , sondern sinngemäßer auf ein Intervall. Für die praktische Begründung und den Vergleich mit anderen Methoden muß auf die ziemlich ausführliche Einleitung verwiesen werden. — Daß jedes denkbare X eine Abschätzung für ϑ_1 liefern soll, bedeutet mathematisch, daß zwei feste Funktionen $\underline{\vartheta}(X)$ und $\bar{\vartheta}(X)$ gesucht werden, die also wieder stochastische Veränderliche mit bekannten Verteilungsfunktionen sind. Die Vorschrift des Verf. lautet: Man suche das „Confidence-Intervall“ $(\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta})$ so zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit der Relation $\underline{\vartheta}(X) \leq \vartheta_1 \leq \bar{\vartheta}(X)$ identisch in allen ϑ_k gleich einem vorgegebenen a ist, $0 < a < 1$. Betrachtet man das Gesetz der großen Zahlen als Erfahrungssatz, so heißt dies, daß man im a -ten Teil aller Beobachtungen ein Intervall erwischen wird, für welches $\underline{\vartheta} < \vartheta_1 < \bar{\vartheta}$. — Im Falle eines einzigen Parameters gibt Verf. auch Vorschriften zur expliziten Bestimmung von $\underline{\vartheta}(X)$ und $\bar{\vartheta}(X)$ an; ferner findet man Ansätze zum Vergleich „der Güte“ von verschiedenen solchen Funktionen. Im Falle mehrerer Parameter ist das Problem im allgemeinen nicht lösbar. Die Behandlung in Spezialfällen beruht auf früheren Arbeiten des Verf. und E. S. Pearsons mit denen die Arbeit

inhaltlich eng zusammenhängt, ohne welche diese Teile der Arbeit kaum verständlich sind (insbesondere dies. Zbl. 14, 321 und 357, auch 13, 409). *W. Feller.*

Schelling, H. von: Zur Beurteilung von Stichproben. *Astron. Nachr.* 264, 29—32 (1937).

Aus einem Kollektiv wurde eine Stichprobe von n Objekten untersucht, von denen m ein bestimmtes Merkmal aufweisen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der „wahre Anteil“ der Merkmalsträger im Kollektiv gleich x ist? Bei der Behandlung dieses unbestimmten Problems hat das Bayessche Theorem bekanntlich viel Verwirrung gestiftet. Verf. will nun die dabei gemachte Grundannahme durch folgende ersetzen, von der er zu hoffen scheint, daß sie weniger Einwänden ausgesetzt sein wird: „Die Wahrscheinlichkeit, daß ein wahrer Anteil x mindestens m Merkmalsträger verursacht, ist ebenso groß wie diejenige, daß der beobachtete Anteil m/n auf einen wahren Anteil $\leq x$ zurückgeht.“ Numerisch ergibt sich eine kleine Korrektur zum Bayesschen Resultat. *W. Feller (Stockholm).*

Wiśniewski, Jan: A note on inverse probability. *J. Roy. Statist. Soc., N. s.* 100, 417—420 (1937).

This note contends that the mathematical logic involved in “reversing” the inequality of Chebyshev and the interpretation of the result given by L. Isserlis [*J. Roy. Statist. Soc.* 99, 130—137 (1936); this Zbl. 13, 313] are invalid. After reversing the inequality in question, Isserlis interpreted the result to mean that he had found a magnitude, P , with the property that it is the probability that a population value, p (a probability) would lie between certain limits when a random sample of n' items from the population had given a relative frequency p' of occurrence. It is held in the present paper that the magnitude, P , interpreted by Isserlis as the probability of certain values of p , does not possess the fundamental property of probabilities, and that when our knowledge is restricted to the results from a sample, we cannot make statements about the probability, p , lying in a certain interval.

H. L. Rietz (Iowa).

Wertheimer, Albert: Note on Zoch's paper on the postulate of the arithmetic mean. *Ann. math. Statist.* 8, 112—115 (1937).

R. T. Zoch (see this Zbl. 13, 174) recently undertook to show that Whittaker and Robinson's derivation of the postulate of the arithmetic mean is incorrect. This paper points out flaws in Zoch's arguments and concludes that no errors were shown to exist in the derivation referred to.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Uno, Tosio: Théorème ergodique dans les phénomènes statistiques héréditaires. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s.* 19, 650—656 (1937).

Verf. betrachtet die Wiederholungen eines Versuches. Jeder Versuch führt zum Auftreten eines der sich ausschließenden festen Ereignisse E_1, E_2, \dots, E_r . Die Wahrscheinlichkeiten beim n -ten Versuch dürfen noch vom Ausfall der vorangehenden Versuche abhängen. Sei P_{i_1, i_2, \dots, i_n} die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E_{i_n} beim n -ten Versuch, wenn diesem die Ereignisse $E_{i_{n-1}}, \dots, E_{i_1}$ beim $(n-1)$ -ten, ..., ersten Versuch vorangegangen sind. Man wird vermuten, daß, wenn diese Wahrscheinlichkeit von den genügend weit vorangegangenen Ereignissen beliebig wenig abhängt, dann die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E_{i_n} im n -ten Versuch, wenn im ersten Versuch E_{i_1} eintrat, bei großem n vom Ausfall des ersten Versuches nur wenig abhängen wird. Verf. gibt einen Beweis für folgende spezielle Präzision dieser Vermutung. Es gibt zwei Zahlen $0 < b < 1$, $0 < K < 1 - b^2$ derart, daß stets $P_{i_1, i_2, \dots, i_n} \geq b$ und $\frac{P_{k_1, \dots, k_{n-p}, i_{n-p+1}, \dots, i_n}}{P_{i_1, \dots, i_{n-p}, i_{n-p+1}, \dots, i_n}} \leq Kb^{2p-2} + 1$ ist. *E. Hopf.*

Camp, Burton H.: Methods of obtaining probability distributions. *Ann. math. Statist.* 8, 90—102 (1937).

The main purpose of this paper, which is largely expository, is to exhibit the essential unity of the principal methods which have been used in finding exact probability

distributions in sampling problems. This is accomplished by stating a general theorem from which the three principal methods in use may be derived as is shown. These methods are illustrated and finally there is given a new derivation of the form of the distribution function of the largest variate in samples from a rectangular universe.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Wilks, S. S., and Catherine M. Thompson: The sampling distribution of the criterion λ_{H_1} when the hypothesis tested is not true. I/II. *Biometrika* 29, 124—132 (1937).

In the first of these two notes, Wilks has given an expression for the g -th sampling moment of the quantity $L_1 = \lambda_{H_1}^{2/N}$ in which λ_{H_1} is the criterion proposed by Neyman and Pearson to test the hypothesis that a set of samples were drawn from populations (assumed normal) all with the same standard deviation (J. Neyman and E. S. Pearson: On the Problem of k samples. *Bull. int. Acad. Polon. Sci., A*, 1931, 460—481; this *Zbl.* 4, 157) Neyman and Pearson (loc. cit.) had obtained like results in the case that the population standard deviations are equal; here Wilks deals with the case in which they are unequal. He gives explicit expressions for the first two moments and proposes Type III curves to be used to approximate the distribution of L_1 . In the second note Miss Thompson supplies the results of applying the curves proposed by Wilks in an extended series of samples from normal populations with unequal standard deviations. The agreement between the empirically obtained distributions and Wilks' curves was excellent. Miss Thompson also investigated the chance of discovering from the samples that the population standard deviations were not equal, using the L_1 criterion. For the samples of 5, 10, and 15 actually used, it appeared that the population standard deviations must differ quite sharply before the chance of detecting the fact that they differ becomes good. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Welch, B. L.: On the z -test in randomized blocks and latin squares. *Biometrika* 29, 21—52 (1937).

There has been much discussion of Fisher's z -test (see author's *Design of Experiments* 1935). It is usual to start with assumptions implying that the parameters η are normally and independently distributed about zero with standard deviations proportional to known numbers. Randomization may be used, to free the problem of such restrictions. Without the lengthy arithmetic calculations for the general case, the author compares the nature of results given by the two methods both in general analytic form and as applied to yields for actual and fictitious randomized blocks and Latin Square arrangements of treatments. Exact agreement is obtained for the means, but the variance in the case of the Latin Squares was notably smaller under the randomization theory than under the normal theory. In place of the classic z , the author uses U , a certain monotonic increasing function of z . He is testing the "null" hypothesis of R. A. Fisher: that the treatments would give equivalent results on every individual plot. Two views are contrasted, the one assuming that the result in each particular field is constant in the unknown universe, and the second that the result for each field is but a random sample from such a universe. The question of possible bias of the normal theory, from the second view-point, seems to call for further experimental trial.

Albert A. Bennett (Providence).

Hirschfeld, H. O.: The distribution of the ratio of covariance estimates in two samples drawn from normal bivariate populations. *Biometrika* 29, 65—79 (1937).

Accepting Fisher's z -test for significance as applicable in the analysis of variance of a single variable, the case of more than one independent variable raises questions concerning correlation and covariation. The author is chiefly concerned with the question as to a criterion of difference between the correlations of two normal bivariate populations from which respective samples are drawn. He constructs a numerical table giving the chance $P(\varrho)$ of drawing two random samples of 15 from a normal population with correlation coefficient ϱ such that the ratio of their covariance estimates is greater than 37/13. Inspection of this table shows the futility of attempting

to approximate the distribution by a normal curve independent of ρ . A careful study of a practical examples suggest the construction and use of auxiliary tables which the author presents to five significant figures. An appendix develops the derivation of the distribution function for the ratio of covariance estimates, expressible even in the most important special case by a complicated formula. *Albert A. Bennett* (Providence).

Savur, S. R.: The use of the median in tests of significance. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 5, 564—576 (1937).

The author compares the arithmetic mean and the median as statistics partially characterizing samples. In the usual case of unknown distributional type for the population, the use of the median is recommended for sampling. A new test of significance, marked by the author with a Sanscrit letter, ("Me") is proposed whose application is simple and which is claimed to present other merits over Fisher's t -test. Tables are given and numerical applications made. *Albert A. Bennett* (Providence).

Geometrie.

Loria, G.: Curve. *Rend. Semin. mat. fis. Milano* 10, 113—126 (1936).

Givens, W. B.: The trisection of an angle. *Amer. Math. Monthly* 44, 459—461 (1937).

Schönhardt, E.: Über die Summe der Projektionen eines Vektors. *Deutsche Math.* 2, 446—451 (1937).

I. Die Summe der Projektionen eines Vektors \mathfrak{B} auf die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ist $\frac{3}{2}\mathfrak{B}$. Hierfür wird ein vektorischer und ein elementargeometrischer Beweis gegeben. Der Beweis kann dadurch vereinfacht werden, daß man den Vektor nach vorgeschriebenen Richtungen (die man günstig wählen kann) zerlegt und den Beweis für die Komponenten führt. Nimmt man statt des Dreiecks ein regelmäßiges n -Eck, so wird die Summe $\frac{n}{2}\mathfrak{B}$. — II. Im Raume gilt ähnlich: Die Summe der Projektionen eines Vektors \mathfrak{B} auf die n Kanten eines regelmäßigen Vielfachs ist $\frac{n}{3}\mathfrak{B}$. Für den R_d wird als Summe $\frac{n}{d}\mathfrak{B}$ vermutet. — III. Der zuerst angeführte Satz gilt auch für beliebige Dreiecke, wenn die Projektion auf jede Dreiecksseite in der Richtung der zugehörigen Schwerlinie genommen wird (affine Verallgemeinerung); ähnlich für das Vielfach. *L. Schrutka* (Wien).

Vahlen, Th.: Bemerkungen zu der Arbeit: E. Schönhardt: „Über die Summe der Projektionen eines Vektors.“ *Deutsche Math.* 2, 452—454 (1937).

Erläuterungen und Ergänzungen zur genannten Arbeit (s. das vorige Ref.) in sehr allgemeiner Darstellung. *L. Schrutka* (Wien).

Deaux, R.: Sur le centre instantané de similitude. *Mathesis* 51, 318—322 (1937).

Soient (ω_i) un ensemble de systèmes plans ω_i directement semblables et superposés; (A_i) un ensemble de points homologues A_i . Pour que le centre de similitude S_1 de deux systèmes soit indépendant du choix de ceux-ci dans (ω_i) , il faut et il suffit que deux ensembles (A_i) , (B_i) se correspondent dans une similitude directe de centre S_1 .

Auszug.

Haarbleicher, André: Sur les courbes qui sont leurs propres inverses isogonales par rapport à un triangle. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 432—434 (1937).

Wenn der Mittelpunkt eines Dreiecks eingeschriebenen Kegelschnittes eine Kurve Q von der Ordnung n beschreibt, so ist der Ort aller Brennpunkte eine Kurve θ von der Ordnung $3n$, welche sich in der isogonalen Verwandtschaft dieses Dreiecks selbst entspricht; sie geht n -mal durch die absoluten Punkte. Umgekehrt ist jede selbstisogonale Linie auf diese Art erzeugbar. Ihre singulären Brennpunkte liegen auf dem Umkreis des Dreiecks. Hat Q in dem Mittelpunkt eines Berührungskreises

einen p -fachen Punkt, so hat θ dort einen $2p$ -fachen Punkt mit paarweise normalen Tangenten. Anwendung auf zirkuläre Kurven 3. Ordnung und auf die Koppelkurve. Eckhart (Wien).

Kasner, Edward, and John de Cicco: Geometry of turbines, flat fields, and differential equations. Amer. J. Math. 59, 545—563 (1937).

Die Arbeit ist der Geometrie orientierter Elemente in der Ebene gewidmet. Als das einfachste Gebilde 1. Stufe wird die „Turbine“ T betrachtet [Kasner, Amer. J. Math. 33 (1911)], d. h. ∞^1 Elemente, die aus den Tangentialelementen eines orientierten Kreises durch eine Drehung um einen festen Winkel α entstehen (die dem Winkel α entsprechende Turbine heißt mit T konjugiert). Zwei Elemente definieren eine einzige Turbine. Als Grundgebilde 2. Stufe wird das „flache Feld“ (flat field) eingeführt, d. h. ∞^2 Elemente, die Tangentialelemente einer Schar sich berührender orientierter Kreise sind; durch drei Elemente wird das flache Feld eindeutig bestimmt. Eine einparametrische Schar von Elementen wird „Reihe“ (series) genannt; sie definiert zwei Kurven: Punktkurve (Träger von Punkten der Elemente) und Linienkurve (Umhüllende der Elementengeraden). Für eine Turbine heißen diese Kurven der äußere bzw. der innere Kreis. Eine einparametrische Schar von Reihen besitzt also zwei Umhüllende, die der Punktkurven und der Linienkurven; es werden notwendige und hinreichende Bedingungen gegeben, damit diese zusammenfallen. In jedem Elemente besitzt die Reihe eine berührende Turbine und ein oskulierendes flaches Feld; ∞^1 Turbinen berühren eine Reihe dann und nur dann, wenn sie eine einzige Umhüllende besitzen. Eine zweiparametrische Schar von Elementen heißt Feld (Differentialgleichung). Alle Reihen eines Feldes, deren Punktkurven durch den Punkt eines Elementes E in derselben Richtung gehen (und deren Linienkurven die Gerade von E in einem und demselben Punkte berühren), bestimmen eine einzige berührende Turbine; bei der Änderung der Richtung liegen die Mittelpunkte dieser Turbinen auf einer Geraden; die äußeren Kreise haben zwei gemeinsame Punkte, die inneren zwei gemeinsame Tangenten. Es werden ferner eingeführt: das berührende flache Feld zu einem Felde in einem Elemente, das umhüllende Feld einer Schar von Feldern, die abwickelbaren Felder (Umhüllende einer Schar von flachen Feldern). Zu einem Elemente E eines Feldes wird das konjugierte definiert als das gemeinsame Element aller Turbinen, die den das Feld in E berührenden Turbinen konjugiert sind; wenn das Feld nicht abwickelbar ist, bilden die konjugierten Elemente auch ein Feld. Die Integralkurven von zwei konjugierten Differentialgleichungen haben gemeinsame oskulierende Kreise. Der Übergang zum konjugierten Feld definiert eine Punkttransformation und eine Geradentransformation, deren Eigenschaften untersucht werden. Es werden Eigenschaften der ∞^3 Turbinen untersucht, die ein Feld berühren. Zum Schluß wird die dreiparametrische Gruppe der Feldtransformationen betrachtet, die durch Drehungen der Elementenrichtungen um einen festen Winkel und durch Verrückungen der Elementenpunkte längs ihrer Geraden um eine feste Länge erzeugt wird (whirl transformations). Als Anwendung werden zwei Sätze bewiesen, die die Sätze von Scheffers und Kasner verallgemeinern. W. Stepanoff (Moskau).

Analytische und algebraische Geometrie:

Aiken, Howard: Trilinear coordinates. J. appl. Physics 8, 470—472 (1937).

Jung, Walter: Untersuchungen über symmetrische Geradenkomplexe. Berlin: Diss. 1937. 47 S.

Brach, Wilhelm: Systematische Begründung der Liesschen Abbildung der komplexen Ebene und Ableitung der Geraden-Kugeltransformation aus der komplexen Geometrie. Bonn: Diss. 1937. 57 S.

Hollerott, T. R.: The existence of algebraic plane curves. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 503—521 (1937).

This paper consists for the most part of a review of the existing literature which

deals with the existence of irreducible plane algebraic curves possessing an assigned number of nodes and cusps. The author gives an example of a curve of order nine with 17 cusps which certainly exists, although the curve with 17 cusps and six additional nodes cannot exist (by a result of Zariski) in spite of the fact that its characters as obtained from Plücker's equations are all positive. *J. A. Todd* (Cambridge).

Buzano, Piero: Osservazioni circa le condizioni di incidenza per due iperspazi subordinati di uno stesso iperspazio. Atti Accad. Sci. Torino **72**, 431—440 (1937).

Dans un travail antérieur [Atti Accad. Sci. Torino **71** (1936); ce Zbl. **14**, 225] l'A. a donné un système de conditions nécessaires et suffisantes afin qu'un S_h et un S_k d'un S_n projectif se coupent suivant un S_l ; d'autres relations découlent tout de suite des conditions assignées par J. A. Schouten (Der Ricci-Kalkül, S. 46, 48. Berlin 1924), exprimant qu'un E_{h+1} et un E_{k+1} d'un E_{n+1} affinen ont exactement $l+1$ directions indépendantes communes. Ici l'A. démontre que les deux systèmes sont équivalents, et que le premier contient un nombre de relations généralement moindre et jamais supérieur à celui du second.

Beniamino Segre (Bologna).

Severi, F.: Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 493—497 (1937).

Severi, F.: Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **25**, 3—9 (1937).

Eine Korrespondenz T , bestehend aus ∞ Punktepaaren auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit M von der Dimension r , ist, als $(2r)$ -Zykel auf der Produktmannigfaltigkeit $M \times M$, homolog einer Linearkombination der Basiszyklen:

$$T \approx \sum_{s=0}^{2r} \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(s)} (\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-i}^j), \quad (1)$$

wobei die Γ_s^i eine Basis für die s -Zykel auf M bilden. Die $\lambda_{ij}^{(s)}$ können berechnet werden, sobald die Homologieklassen der transformierten Zykel $T(\Gamma_s^i)$ der Basiszykel Γ_s^i bekannt sind. Ist T von der Pseudovalenz Null, d. h. sind die transformierten $T(\Gamma_s^i)$ alle \approx algebraischen Zykeln (also ≈ 0 für ungerades s) und nimmt man die vom Autor in Mem. Accad. Ital. **5** (dies. Zbl. **8**, 321) aufgestellte Hypothese als richtig an, so kommen in (1) rechts nur Produkte von algebraischen Zykeln vor, und (1) geht in eine vom Autor früher (dies. Zbl. **15**, 40) aufgestellte Formel über. Die $\lambda_{ij}^{(s)}$ können auch durch die Schnittpunktszahlen $[T(\Gamma_s^i) \cdot \Gamma_{2r-i}^j]$ ausgedrückt werden. Sind Γ_s^i und Γ_{2r-i}^j algebraisch, so haben diese Schnittpunktszahlen eine algebraisch-geometrische Bedeutung. Sind alle $\lambda_{ij}^{(s)} = 0$ mit Ausnahme von $\lambda_{11}^{(0)} = \alpha$ und $\lambda_{11}^{(0)} = \beta$, und ist $r > 1$, so zerfällt T in irreduzible Bestandteile $x \times M$ und $M \times y$.

van der Waerden (Leipzig).

Godeaux, Lucien: Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Bull. Sci. math., II. s. **61**, 82—96 (1937).

Etude de deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, V_3 , à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro. Ces involutions sont définies à partir d'une homographie (H) dont les équations contiennent une racine cubique ($\neq 1$) de l'unité et prennent deux formes distinctes suivant qu'un exposant k qui y figure est ou non multiple de 3. Dans le premier cas, l'involution possède une courbe unie et a pour image une variété Ω qui possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro; sur cette variété, chaque système linéaire de surfaces est son propre adjoint. Dans le second cas, l'involution possède 9 points unis et a pour image une variété Ω_1 qui est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possède une surface tricanonique d'ordre zéro; tout système linéaire de surfaces sur Ω_1 est distinct de son adjoint et de son biadjoint, mais coïncide avec son triadjoint.

P. Dubreil (Nancy).

Godeaux, Lucien: Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Ann. École norm., III. s. 54, 55—79 (1937).

Es sei V eine algebraische Mannigfaltigkeit mit drei Dimensionen, die folgende Eigenschaften besitzt: 1. ihre kanonischen und mehrkanonischen Flächen haben die Ordnung 0; 2. ihre Flächenirregularität ist 0; 3. es gibt eine zyklische birationale Transformation 3. Ordnung T , die V in sich selbst verwandelt. Es sei I_3 die Involution, die von T auf V erzeugt wird. Einige einleitende Betrachtungen und Konstruktionen zeigen, daß es ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist, vorauszusetzen, daß T eine zyklische Homographie 3. Ordnung ist und daß sie drei Fixpunkträume S_1, S_2, S_3 mit den Dimensionen r_1, r_2, r_3 besitzt. Die Dimension des Raumes, in dem V liegt, ist dann $r = r_1 + r_2 + r_3 + 2$. Das Linearsystem $|F|$ der hyperebenen Schnittflächen von V wird von T in sich selbst verwandelt und enthält drei Systeme $|F_1|, |F_2|, |F_3|$, die mit I_3 zusammengesetzt sind und von den Hyperebenen durch S_2S_3, S_3S_1, S_1S_2 auf V bzw. ausgeschnitten werden. Die Projektion von V von dem Verbindungsraume S_2S_3 aus auf S_1 liefert ein Bild Ω der Involution I_3 ; die Projektionen der drei Systeme $|F_i|$ sind drei Systeme $|\Phi_i|$ auf Ω ; Φ_1 sind die hyperebenen Schnittflächen von Ω . Man kann jetzt verschiedene Fälle unterscheiden. — Wenn I_3 keinen Doppelpunkt besitzt, haben die Räume S_i mit V keinen Punkt gemein; und es ist $|\Phi'_i| = |\Phi_i|$, so daß V eine kanonische Fläche der Ordnung 0 besitzt; man beweist auch, daß $r_1 = r_2 = r_3$, daß die Flächenirregularität von Ω den Wert 0 hat und daß Ω den Divisor $\sigma = 3$ besitzt. — Wenn I_3 eine endliche Anzahl von Doppelpunkten besitzt, so sind diese alle „unvollkommen“ („non parfaits“, dies. Zbl. 13, 413); sie sind die Schnittpunkte von V mit S_1 ; ihre Anzahl ist 9; und es ist $|\Phi'_1| = |\Phi_2|, |\Phi'_2| = |\Phi_3|, |\Phi'_3| = |\Phi_1|$, so daß Ω keine kanonische und bikanonische Fläche, sondern eine dreikanonische Fläche der Ordnung 0 enthält. Beispiele solcher V hat Verf. schon angegeben (vgl. vorsteh. Ref.). — Im Falle, wo I_3 eine ganze Linie D von Doppelpunkten besitzt, die für V einfach ist (und wenn der Tangentialraum von V in einem allgemeinen Punkt P von D mit S_1 nur die Tangente von D in P gemein hat), so ist diese „unvollkommen“; und Ω besitzt wieder eine kanonische Fläche der Ordnung 0. Die Kurve D gehört dem Raume S_1 an, wenn I_3 außer D keine weiteren Doppelpunkte besitzt. — Schließlich ein Beispiel einer I_3 , die gleichzeitig eine Linie D von Doppelpunkten und eine endliche Anzahl getrennter Doppelpunkte besitzt.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur les variétés algébriques de genres un contenant des involutions cycliques. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 204—206 (1937).

Verf. betrachtet hier zyklische Involutions I_p einer Primzahlordnung p , die auf einer Mannigfaltigkeit V mit drei Dimensionen liegen. Es wird vorausgesetzt, daß die Flächenirregularität von V den Wert 0 und die Geschlechter von V den Wert 1 haben. Man kann V so birational umformen, daß I_p eine zyklische Homographie eines Raumes S_p mit p Fixpunkträumen $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$ wird, so daß $S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$ mit V keinen Punkt gemein haben. Die Schnittpunkte $VS^{(1)}$, deren Anzahl endlich angenommen wird, sind die Doppelpunkte von I_p . Es wird eine Konstruktion angegeben, welche gestattet, die Eigenschaften der Involution I_p in der Umgebung eines Doppelpunktes A zu untersuchen; die Ergebnisse werden ohne Beweise zusammengefaßt (für den Fall $p = 3$ vgl. vorsteh. Ref.).

E. G. Togliatti (Genova).

Differentialgeometrie:

Popa, I.: Sulle „trasformate asintotiche“ delle curve sghembe. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 107—111 (1937).

L'A. considère deux courbes Γ, Γ_1 „transformées asymptotiques“ l'une de l'autre, c'est-à-dire rapportées entre elles dans une correspondance associant deux points P de Γ et P_1 de Γ_1 dont les plans osculateurs contiennent la droite PP_1 . Les éléments

du 2^{ème} ordre de Γ, Γ_1 sortant de P, P_1 déterminent deux plans (formant un groupe harmonique avec les deux plans osculateurs), lieu des sommets des cônes quadriques qui les contiennent. Les éléments du 3^{ème} ordre sortant de P, P_1 permettent à l'A. de définir d'une façon invariante deux points (constituant avec P, P_1 quatre points indépendants), en se servant des quadriques ayant avec eux un comportement convenable, et certains invariants; l'interprétation géométrique complète de ceux-ci est obtenue ensuite moyennant les voisinages du 4^{ème} ordre, qui de plus fournissent à l'A. un repère projectif (tétraèdre et point unité) attaché intrinsèquement aux deux courbes.

Beniamino Segre (Bologna).

Weatherburn, C. E.: On the equations of Gauss and Codazzi for a surface. Tôhoku Math. J. 43, 30—32 (1937).

Geometrische Interpretation der Formeln von Gauß und Codazzi. Für die erstere betrachte man ein beliebiges Orthogonalsystem auf der Fläche mit den entsprechenden Hauptkrümmungsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 . Die Gaußsche Krümmung ist dann gleich der Divergenz des Vektorfeldes, das durch die in die Tangentialebene der Fläche fallende Komponente von $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ gebildet wird.

W. Feller (Stockholm).

Decuyper, M.: Sur des congruences de normales attachées à la déformation des surfaces. Enseignement Math. 36, 199—209 (1937).

Es seien M und N entsprechende Punkte zweier abwickelbarer Flächen (M) und (N). Mit jedem Punkte von (M) wird ein zu einem festen Bezugssystem paralleles, rechtwinkliges Dreiein starr verbunden. Wird (M) auf (N) abgewickelt, so entsteht ein zweiparametrisches System von rechtwinkligen Dreieinen, dessen Kanten, wie Verf. zeigt, drei Normalensysteme bilden. Die Bestimmung der auf eine Fläche (N) abwickelbaren Flächen ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung aller begleitenden rechtwinkligen Dreieine, deren Kanten Normalensysteme sind. Die Konstruktion solcher Normalensysteme führt auf gewisse Kugelkongruenzen. Zum Schluß werden die auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Flächen betrachtet.

W. Haack.

Pantazi, Al.: Sur une propriété caractéristique des réseaux R . Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 17, 173—175 (1936).

L'auteur démontre le théorème connu: les deux axes d'un réseaux R (= la droite d'intersection des plans osculateurs des deux courbes du réseau et la droite qui joint les foyers homologues des congruences des tangentes aux lignes du réseau) engendrent un couple stratifiable.

S. Finikoff (Moscou).

Pantazi, Al.: Sur les réseaux R . Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 18, 6—7 (1936).

En poursuivant l'étude des réseaux R (voir le réf. préc.) l'auteur montre que les deux axes d'un réseau (A) engendrent un couple de congruences stratifiable dans un sens (= il existe ∞^1 surfaces dont les plans tangents aux points situés sur le premier axe passent par le second axe du réseau) si 1° (A) est un réseau R ou bien 2° (A) est un réseau isotherme-conjugué et harmonique (= les rayons homologues des deux congruences transformées de Laplace des congruences des tangentes des courbes du réseau se coupent).

S. Finikoff (Moscou).

Sun, Tseying: On the complete set of identities for affine space. Tôhoku Math. J. 43, 261—266 (1937).

A complete set of identities for the components of the covariant derivative of the curvature affinor in an A_n (= L_n with a symmetrical connection) is deduced from the complete set of identities for the components of the normal tensors. This is possible, because the covariant derivatives of the curvature affinor can be expressed in terms of the normal tensors and on the other hand a normal tensor can be expressed in terms of the covariant derivatives of the curvature affinor.

J. Haantjes (Delft).

Kawaguchi, Akitsugu: Theorie des Raumes mit dem Zusammenhang, der von Matrizen abhängig ist. Mh. Math. Phys. 44, 131—152 (1936).

This paper deals with the ultimate generalization of the geometry of Finsler spaces. The element in this geometry is a point x^i , $i = 1, \dots, n$, with which are

associated m independent contravariant vectors $p_{(\alpha)}^i$, $\alpha = 1, \dots, m$, and M independent covariant vectors $q_i^{(A)}$, $(A) = 1, \dots, M$. The invariant affine theory of such a space is studied by means of two sets of components of affine connection $A_{\alpha k}^i$ and $A_{ik}^{(A)}$. Under point transformations the usual vector law is to be used; under parameter transformations $u'^\alpha = u'^\alpha(u, x)$ $p'_\alpha{}^i = U_\alpha^\beta{}^i(u, x) p_\beta^i$ $|U_\alpha^\beta{}^i| \neq 0$,

with a similar law for the covariant vectors. Nothing is said about the nature of the matrix U to insure transitivity which is essential if the theory is to have any content. The author develops the transformation laws for the two affine connections and from them computes the different tensors of curvature and torsion. These — quite naturally — the author shows reduce to those of Douglass if $M = 0$ and $p_{(\alpha)}^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ and to those of Cartan if $m = 0$ and $M = 1$.

M. S. Knebelman (Princeton).

Varga, Otto: Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen. Lotos 84, 1—4 (1936).

This is an abstract of the author's dissertation which deals with a Finsler space the covariant differential being defined by $D\xi^i = d\xi^i + C_{ki}^i(x, \dot{x}) \xi^k d\dot{x}^i + \Gamma_{ki}^i(x, \dot{x}) \xi^k d\dot{x}^i$. The usual symmetry conditions are not used, the only restriction being $C_{ki}^i \dot{x}^k = 0$. It is stated that the dissertation deals with spaces characterized by the vanishing of certain curvature and torsion tensors. No results are given. *M. S. Knebelman.*

Wegener, Johannes M.: Untersuchungen über Finslersche Räume. Lotos 84, 4 bis 7 (1936).

This extract from the author's dissertation deals with the geometry (metric) of a Finsler space of two and three dimensions. The geometrical significance of the principal scalar I and curvature scalar K of a surface are given. Some new results are stated for the space $ds = \sqrt[3]{a_{ikl} x'^i x'^k x'^l}$ for two and three dimensions.

M. S. Knebelman (Princeton).

Topologie:

Winn, C. E.: A case of coloration in the four color problem. Amer. J. Math. 59, 515—528 (1937).

The author tabulates a series of reductions, mostly new, which go to show: I) that a map containing at most one polygon of more than 6 sides can be colored, and II) that in an irreducible map any polygon of less than 7 sides must touch a polygon of more than 6 sides.

A. W. Tucker (Princeton).

Winn, Charles Edgar: Sur quelques réductibilités dans la théorie des cartes. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 352—354 (1937).

Extending a result of Franklin [Amer. J. Math. 44, 225—236 (1922)] the author demonstrates the four-color reducibility of a map containing a $2n$ -gon surrounded by $2k$ pentagons, a hexagon, $2(n - k - 1)$ pentagons and an arbitrary polygon. By a method of Errera [Bull. Soc. Math. France 53, 42—55 (1925)] the reducibility holds when the $2n$ -gon is divided into a number of regions. The author also removes partly the isthmus restriction from a reducibility of Errera.

A. W. Tucker.

Hall, Dick Wick: On the non-alternating images of linear graphs. Amer. J. Math. 59, 575—584 (1937).

A continuous transformation $T(A) = B$ is said to be non-alternating [Whyburn, Amer. J. Math. 56, 294—302 (1934); this Zbl. 9, 88] provided that for no two points x and y of B does $T^{-1}(x)$ separate $T^{-1}(y)$ in A . It is known that boundary curves (i.e. locally connected continuum all of whose true cyclic elements are simple closed curves) map into boundary curves under such a transformation and that any boundary curve is the non-alternating image of a circle. The author makes a study of such transformations as applied to linear graphs. It is shown that if a continuum C is cyclic (i.e., without cut points), then C is the non-alternating image of a linear graph if and only if C is the sum of a finite number of simple arcs. Furthermore every curve C

which is the sum of a finite number of simple arcs is the non-alternating image of a graph; and, on the other hand, if B is the non-alternating image of a graph then every true cyclic element of B is the sum of a finite number of simple arcs. *Whyburn.*

Nielsen, Jakob: Das Äquivalenzproblem für periodische Transformationen. Mat. Tidsskr. B 1937, 33—41 [Dänisch].

Nielsen, Jakob: Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. 15, Nr 1, 1—77 (1937).

Eine topologische, die Orientierung erhaltende, periodische Selbstabbildung τ einer orientierbaren, mit endlich vielen Randkurven versehenen Fläche φ vom Geschlechte p hat die Ordnung n , wenn τ^n und keine frühere Potenz die identische Abbildung ist. Zwei Abbildungen τ und τ' heißen äquivalent, wenn es eine topologische Selbstabbildung ϑ von φ von der Art gibt, daß $\tau' = \vartheta \tau \vartheta^{-1}$ ist. Die äquivalenten periodischen Abbildungen bilden einen Typus. Problem: Zu vorgegebener Fläche φ alle Abbildungstypen der Ordnung n zu bestimmen. — Die Potenzen von τ machen die zyklische Gruppe der Ordnung n aus. Identifiziert man alle Punkte, die aus einem Punkte P durch die Transformationen der Gruppe hervorgehen, so entsteht nach Brouwer die Modulfläche M vom Geschlechte q ($\leq p$), die von φ n -blättrig und im allgemeinen verzweigt überlagert wird. Die Überlagerung ist regulär, und die Deckbewegungsgruppe besteht aus den Abbildungen τ, \dots, τ^n . — Über einem festen Anfangspunkte P von M , der kein Verzweigungspunkt ist, liegen die Punkte P_1, \dots, P_n ; es ist $P_\nu = \tau^{\nu-1}(P_1)$, $\nu = 1, \dots, n$. Einem geschlossenen, von P ausgehenden, die Verzweigungspunkte meidenden Wege von M entspricht eine bestimmte Permutation $(P_1, \dots, P_n)^\mu$ der Punkte P_1, \dots, P_n . Die Zahl μ heißt der Monodromieexponent des geschlossenen Weges. Jedem Verzweigungspunkte von M gehört ebenfalls ein Monodromieexponent zu; das ist der Monodromieexponent eines den Verzweigungspunkt einmal positiv umkreisenden Weges. Man kann ein kanonisches Rückkehrschnittssystem $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ auf M so wählen, daß a_1 den Monodromieexponenten 1, alle übrigen den Exponenten 0 haben. Hieraus folgt der Äquivalenzsatz: Der Typus ist (bis auf einen Wechsel der Orientierung von φ) vollständig charakterisiert durch die Monodromieexponenten der Verzweigungspunkte und der Randkurven. — Als Sonderfall folgt, daß zwei die Orientierung erhaltende Abbildungen der Ordnung $n=2$ dann und nur dann topologisch äquivalent sind, wenn sie in der Anzahl der Fixpunkte und in der Anzahl der invarianten Ränder übereinstimmen (W. Scherrer). — Die Abbildung τ bewirkt einen Automorphismus der Fundamentalgruppe F von φ , die nach dem Reidemeisterschen Verfahren als Untergruppe der Fundamentalgruppe T von M durch Erzeugende und Relationen dargestellt wird. Der Automorphismus von F erzeugt einen Automorphismus der Homologiegruppe H von φ ; er wird durch eine bestimmte Substitution der Erzeugenden von H gegeben. Durch das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix dieser Substitution ist der Typus der Abbildung τ weitgehend bestimmt. Hierbei ergibt sich die Spurformel von Alexander-Lefschetz-Hopf.

H. Seifert (Heidelberg).

Hantzsche, W.: Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume. Math. Z. 43, 38—58 (1937).

Es werden aus dem Alexanderschen Dualitätssatze Bedingungen dafür abgeleitet, daß eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit sich in den $(n+1)$ -dimensionalen euklidischen Raum oder, was dasselbe bedeutet, in die $(n+1)$ -Sphäre simplizial einlagern läßt. I. Ist $n = 2m$ gerade, so ist eine notwendige Bedingung für die Einlagerbarkeit die, daß die mittlere Bettische Zahl p^m gerade ist. II. Ist $n = 2m+1$ ungerade, so muß stets eine gerade Anzahl von Torsionskoeffizienten der Dimension m den gleichen Wert haben. Die reellen projektiven Räume der Dimension $4n-1$ lassen sich daher nicht in die $4n$ -Sphäre einlagern, Linsenräume, Oktaederraum und hyperbolischer Dodekaederraum nicht in die 4-Sphäre. — Für $n=3$ läßt sich die Be-

dingung II für die Homologiegruppe nicht verschärfen, was durch Konstruktion einer in die 4-Sphäre einlagerbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit für jede der Bedingung II genügende Homologiegruppe gezeigt wird. — Die Einlagerung des Quaternionenraumes, der der Bedingung II genügt, wird mit Hilfe der Theorie der gefaserten Räume bewirkt. Schließlich wird gezeigt, daß eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit auf zwei topologisch wesentlich verschiedene Weisen in die 4-Sphäre eingelagert werden kann, d. h. so, daß die Homologiegruppe des Innenraumes der einen Einlagerung weder mit der Homologiegruppe des Innen- noch des Außenraumes der anderen Einlagerung übereinstimmt. — Von besonderem Interesse sind die in Anhängen untergebrachten kombinatorisch topologischen Hilfssätze über Innen- und Außenräume und Umgebungskomplexe der eingelagerten Mannigfaltigkeiten und Komplexe.

Threlfall (Halle a. d. S.).

Borsuk, Karol: Quelques relations entre la situation des ensembles et la rétraction dans les espaces euclidiens. *Fundam. Math.* **29**, 191—205 (1937).

Sei E eine beliebige Menge der n -dimensionalen Kugeloberfläche S_n . Unter einem Zyklus werden verstanden ein algebraischer Zyklus mit den Ecken $\subset E$, deren Koeffizienten einer Abelschen Gruppe \mathfrak{G} angehören, die entweder diskret und höchstens abzählbar oder (topologisch und) kompakt ist und dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt. Eine Folge $\{\gamma_i\}$ von solchen k -dimensionalen Zyklen heißt ein konvergenter Zyklus von E , wenn die Ecken der γ_i einer kompakten Teilmenge E' von E angehören, die Simplexdurchmesser der γ_i gegen Null konvergieren und eine Folge von Komplexen κ_i mit Ecken $\subset E'$, Koeffizienten aus \mathfrak{G} und gegen Null konvergierenden Simplexdurchmessern existiert derart, daß der Rand von κ_i gleich $\gamma_{i+1} - \gamma_i$ ist (ein Zyklus mit ganzzahligen Koeffizienten, der als Zyklus mit rationalen Koeffizienten konvergiert, heißt schwach konvergent). Zwei konvergente Zyklen $\{\gamma_i^1\}$ und $\{\gamma_i^2\}$ heißen homolog in E , wenn der Zyklus $\{\gamma_i^1\}$, wo $\gamma_{2i-1}^1 = \gamma_i^2$ und $\gamma_{2i}^1 = \gamma_i^2$ ist, konvergent in E ist. — Ist A eine beliebige Menge eines Raumes M , so heißt eine zweite Menge B von M transversal zu A , wenn A ein Retrakt von $M - B$ ist. Verf. beweist: 1. Sind A und B zwei abgeschlossene Teilmengen von S_n und ist B transversal zu A , so existiert zu jedem in $S_n - A$ gelegenen Zyklus ein konvergenter Zyklus von B , der zu ersterem in $S_n - A$ homolog ist. 2. $A \subset S_n$ sei zu S_k ($k = 0, 1, n - 1$) homöomorph; damit die abgeschlossene Menge B transversal zu A sei, ist notwendig und hinreichend, daß jeder in $S_n - A$ liegende, $(n - k - 1)$ -dimensionale Zyklus mit ganzen Koeffizienten in $S_n - A$ homolog sei einem schwach konvergenten Zyklus von B . 3. $A \subset S_3$ sei ein Polyeder mit erster Bettischer Zahl ≤ 1 ; dann ist zu A transversal jede Menge $B \subset S_3 - A$ mit der Eigenschaft, daß jeder in $S_3 - A$ enthaltene Zyklus in $S_3 - A$ homolog ist einem konvergenten Zyklus von B .

Nöbeling (Erlangen).

Miller, Edwin W.: Concerning biconnected sets. *Fundam. Math.* **29**, 123—133 (1937).

In answer to a well known question raised by Knaster and Kuratowski in 1921 the author proves, with the aid of the hypothesis of the continuum, the existence of a biconnected set in the plane which contains no dispersion point (a set is biconnected provided it is connected and is not the sum of two mutually exclusive connected sets; a point p is a dispersion point of a set M provided $M - p$ contains no connected set). A set of the form $M \cdot C$ where M is a connected set and C is a continuum separating M in the plane is called an M -boundary; a family of sets has property B (Berstein) if there exists a set which contains at least one element of each set of the family but which exhausts no set of the family; and a connected set is widely connected (Swingle) provided every connected subset of it is everywhere dense in it. The author shows that any widely connected set M whose family of M -boundaries fails to have property B is biconnected and has no dispersion point. Furthermore a connected subset M of an indecomposable continuum K is widely connected if no composant of K contains a connected subset of M . It is then shown that there exists in a plane indecomposable continuum K a connected subset M which has no connected set in common with any

composant of K and whose family of M boundaries fails to have property B and accordingly M is a set of the type desired. Whyburn (Virginia).

Jones, F. Burton: Concerning certain topologically flat spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **42**, 53—93 (1937).

The author considers a space satisfying R. L. Moore's Axioms 0—4 (*Foundations of Point Set Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publications **1932**; this Zbl. **5**, 54) and the following modification of Axiom 5, called Axiom 5_1^* : For any point p of a region R there exists in R a domain D containing p whose boundary is a subset of the sum of a finite number of continua lying in $R - D$. It is first shown that in a space satisfying axioms 0—2, any two points a and b at which axiom 5_1^* is satisfied lie together on a simple closed curve in the space and that a space satisfying axioms 0—2, 4 and 5_1^* is either acyclic or cyclic (without cut points). There follows a large body of theorems closely related to plane analysis situs established on the basis of axioms 0—4 and 5_1^* comprising the first part of the paper. In the second part the condition of complete separability is added (Moore's Axiom 7) and a group of theorems is proven culminating in the proposition that any space S satisfying this system of conditions is homeomorphic with a subset of a plane or of a sphere. For metric spaces this gives the result that any locally connected complete space in which the Jordan Curve Theorem is non-vacuously satisfied and in which axiom 5_1^* holds is homeomorphic with a cyclicly connected subset of a plane or of a sphere. Whyburn (Virginia).

Stone, M. H.: Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc.* **41**, 375—481 (1937).

The author applies his theory of the algebra of classes [*Trans. Amer. Math. Soc.* **40**, 37—111 (1936); this. Zbl. **14**, 340] to general topology. — He first establishes a one-one correspondence between "Boolean" rings R (i. e., rings whose elements are idempotent) and "Boolean" spaces H (i. e., totally disconnected locally bicomact Hausdorff spaces). The ideals J of R correspond to the open sets of H ; the quotient-rings R/J to the complementary closed sets; the principal ideals of R to the bicomact open sets of H ; the prime ideals of R to the complements of points in H ; automorphisms of R to self-homeomorphisms of H . H is bicomact if and only if R has a unit. The "universal" Boolean spaces of given character c introduced by Tychonoff, correspond to the "free" Boolean rings generated by c symbols. — He then discusses "maps" of general spaces S on Boolean spaces H : points in S become closed sets in H . He shows that any T_0 -space is characterized topologically by its maps. He uses this fact to discuss the embedding of T_0 -spaces as dense subsets in bicomact spaces (the "problem of extension"), obtaining new results. — He also studies various regularity and normality conditions on T_0 -spaces, among them a new condition of "semi-regularity", important for his theory of mapping. And finally, he discusses the "function-ring" of all continuous, bounded functions on an arbitrary T_0 -space. He uses this to obtain a solution of the problem of extension. Garrett Birkhoff (Cambridge, U. S. A.).

Mechanik.

Analytische Mechanik, Ergodenprobleme:

Johnsen, Leif: Sur la réduction au nombre minimum des équations du mouvement d'un système non-holonyme. *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* **1937**, 1—14 (Nr 11).

Given a dynamical system subject to non-holonomic constraints, it is desired to find the equations of motion of the system in a form which contains the minimum number of equations. The method of solution given by Hamel in 1904 for systems whose equations of constraint are linear, depended on the introduction of non-holonomic parameters or "quasi-coordinates"; this method was extended by the author to systems whose equations of constraint are of a more general type, but the quasi-coordinates

thus introduced were not independent. In the present paper a theory of reduction is given, leading to Lagrangean equations of motion in independent quasi-coordinates.

Whittaker (Edinburgh).

Frazer, R. A.: On the representation of non-linear motions by series of damped time exponentials. *Philos. Mag.* 23, 866—879 (1937).

The paper is concerned with non-linear non-conservative dynamical systems, the real part of whose characteristic exponents are negative. By means of simple examples, the author shows that the possibility of a convergent development of the solution in the form of series of sums of damped exponentials does not necessarily imply stability.

D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

Kolmogoroff, A.: Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff-Khinchineschen Ergodensatzes. *Rec. math. Moscou*, N. s. 2, 367—368 (1937).

Der Birkhoffsche Ergodensatz über die Existenz der Verweilhäufigkeit bei einer maßtreuen Abbildung ist von Khinchine folgendermaßen verallgemeinert worden: x_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sei eine stationäre Folge zufälliger Größen. Die von i un-

abhängige mathematische Erwartung $E(x_i)$ sei endlich. Dann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$

mit der Wahrscheinlichkeit Eins. Verf. gibt hierfür einen einfacheren Beweis. *Hopf*.

Oxtoby, John C.: Note on transitive transformations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 23, 443—446 (1937).

Ω sei ein beschränkter Bereich des n -dimensionalen Euklidischen Raumes, $n \geq 2$. Eine topologische Abbildung von Ω auf sich heißt transitiv (oder quasi-ergodisch), wenn es einen Punkt in Ω gibt, dessen Nachfolger in Ω überall dicht liegen. Eine klassische Vermutung (Poincaré, Gibbs, Birkhoff) besagt, daß die volumtreuen topologischen Abbildungen von Ω auf sich „im allgemeinen“ transitiv sind. Die Volumtreue ist wesentlich, da sonst die Vermutung falsch ist. — Die vorliegende Note bedeutet einen ersten wesentlichen Schritt in dieser Frage. Die Vermutung wird in folgendem Sinne präzisiert und bewiesen. Es wird gezeigt, daß die volumtreuen topologischen Abbildungen von Ω auf sich einen vollständigen metrischen Raum \mathfrak{R} bilden. Die Metrik ergibt sich in naheliegender Weise. Dann bilden die nichttransitiven Abbildungen in \mathfrak{R} eine Menge der ersten Kategorie (= Summe höchstens abzählbar vieler, in \mathfrak{R} nirgends dichter Mengen). Hieraus folgt speziell, daß die transitiven Abbildungen in \mathfrak{R} überall dicht liegen, d. h. daß jede volumtreue Abbildung durch beliebig kleine Abänderung (unter Wahrung der Volumtreue) zu einer transitiven gemacht werden kann. Der Beweis beruht auf folgenden Gedanken: Eine topologische Abbildung T von Ω auf sich ist dann und nur dann transitiv, wenn zu irgend zwei offenen Teilmengen σ, σ' von Ω ein Bild $T^k \sigma$ existiert, das mit σ' Punkte gemein hat. Da man sich auf ein abzählbares System von Umgebungen σ (z. B. die rationalen Kugeln oder Kreise) beschränken kann, braucht man nur zu zeigen, daß für irgend zwei feste σ, σ' diejenigen volumtreuen T , bei welchen alle $T^k \sigma$, $k = 0, 1, \dots$, keinen Punkt mit σ' gemein haben, in \mathfrak{R} eine nirgend dichte Menge bilden. Dazu genügt der Nachweis, daß durch beliebig kleine Änderung eines solchen T ein T' erhalten werden kann, bei welchem ein $T^k \sigma$ doch einmal σ' erreicht. Dieser Nachweis wird auf eine einfache und sinnreiche Weise erbracht. Ref. bemerkt, daß das Resultat in viel weiterem Umfange gültig bleibt. Z. B. spielt es keine Rolle, ob T auf dem Rande von Ω stetig ist oder nicht. Ω kann auch allgemeiner eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit oder ein Teilbereich derselben mit einer endlichen Volummetrik sein. *E. Hopf* (Leipzig).

Hilmy, H.: Sur la théorie des ensembles quasi-minimaux. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 15, 113—116 (1937).

In a previous paper (this Zbl. 15, 323), the author defined quasi-minimal sets of motions of a dynamical system as a subclass of the dynamically indecomposable sets. Here quasi-minimal sets are defined directly as follows: p_i denoting the point into

which the point p moves after time t , a set of motions A is positively (negatively) invariant if $p \in A$ implies $p_t \in A$, $t \geq 0$ ($t \leq 0$); an invariant closed set Ω is quasi-minimal if it is not the sum of two closed sets of motions, different from Ω , one of which is positively invariant, while the other is negatively invariant. It is shown that the theorems of the previous paper concerning the relation of quasi-minimal sets with motions stable in the sense of Poisson hold. One of these theorems is extended in that it is shown that with the exception of a set of points of the first category of Baire, all the points of a quasi-minimal set Ω lie on motions which are stable in the sense of Poisson, each of these motions being everywhere dense in Ω . *Hedlund.*

Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

● **Steinbrüchel, A.: Tafel der Sonnen- und Mondfinsternisse, der Neu- und Vollmonde von 1265 v. Chr. bis 2345 n. Chr. mit erläuterndem Text.** Neujahrsblatt hrsg. v. d. Naturforsch. Ges. in Zürich auf das Jahr 1937. 139. Stück. Zürich: Gebr. Fretz A.G., 24 S. + 12 Fig. im Text u. 1 mehrfarbige Tafel.

Die Hauptsache in dieser kleinen Schrift ist eine graphische Darstellung der mittleren Orte der Neu- und Vollmonde einerseits, der Erdscheibe und des Erdschattens andererseits als Funktion der Zeit. Die Zeitachse (29 Jahre \approx 358 syn. Monate) ist in parallele 15 Gerade zerlegt. Die Mond- und Erdorte einerseits, die Schattenscheiben andererseits definieren äquidistante Punktreihen auf der Zeitachse und liefern periodisch mehr oder minder genaue Koinzidenzen. Die Größe der entsprechenden Finsternis ist aus der Größe des Durchschnitts der betreffenden Scheiben unmittelbar zu erkennen. Eine am Rand angegebene Zeitskala läßt die sich ebenfalls periodisch verschiebenden Jahresanfänge erkennen, und ein beigegebener Maßstab dient zur Ablesung der Monate und Tage. So ist ein ganz hervorragend praktisches Hilfsmittel geschaffen, um das Datum einer Finsternis für $3\frac{1}{2}$ Jahrtausende unmittelbar ablesen zu können. Die Genauigkeit der Tafel ist auf etwa $1\frac{1}{2}$ Tage zu schätzen, was für viele historisch-chronologische Zwecke vollständig ausreichend ist. — Ergänzende Angaben zur Bestimmung von Sichtbarkeitsfragen sind beigegefügt, ebenso eine Einleitung über die Grundbegriffe der Finsternisberechnung. *O. Neugebauer (Kopenhagen).*

Garcia, Godofredo, und Alfred Rosenblatt: Über das ebene Dreikörperproblem. Rev. Ci., Lima 38, Nr 419, 57—94 (1937) [Spanisch].

Die Arbeit bringt die Rechnungen, die zu den von den Verff. unlängst (vgl. dies. Zbl. 16, 380) angegebenen Formeln führen. *Wintner (Baltimore).*

Arrighi, G.: Osservazioni sul moto newtoniano di due masse qualsiasi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 177—184 (1937).

Betrachtet wird die Bewegung zweier starrer, nicht notwendig homogener, gravitierender Körper umeinander. Ist einer der beiden Körper ein Punkt, so kann man sein bewegliches Kraftzentrum in bezug auf den anderen Körper auf die übliche Weise definieren und dann zu dem allgemeinen Fall durch Integrationen übergehen. Auf diese Weise werden für die gegenseitige Bewegung der beiden Körper verschiedene nützliche Formulierungen und Konsequenzen der Drehimpuls- und Schwerpunktsätze hergeleitet. *Wintner (Baltimore).*

Vescan, Théophile: Considérations sur le problème des deux corps dans le cas des masses variables. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 7, 60—63 (1937).

An elementary derivation, without use of trigonometric series, of a formula of Gylden (Astron. Nachr. 109, 1—6). *D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., U. S. A.).*

Graffi, D.: Ulteriori ricerche sull'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 6, 37—46 (1937).

In a previous paper [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 438—443 (1935); this Zbl. 11, 373] the effect of the fall of corpuscles on, or their emission from, the planet at and near perihelium was considered. In particular, the results show that an increase of mass from this cause produces a decrease in the eccentricity. These results are extended in the present note to the case where the mass of the sun is gradually decreasing instead of remaining constant. *D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., U. S. A.).*

Zamorev, A.: On the determination of the shape of a planet from the motion of satellites. Astron. J. Soviet Union 14, 364—369 u. engl. Zusammenfassung 369 (1937) [Russisch].

La masse d'une planète homogène étant connue, l'équation de sa surface est supposée (suivant Liapounoff) être de la forme $R = \bar{a}(1 + \zeta)$; \bar{a} est le rayon de la sphère dont la masse est égale à celle de la planète et dont le centre est au centre de gravité de celle-là; ζ est une fonction inconnue des coordonnées sphériques θ, φ . Les équations du mouvement du satellite dans un système de coordonnées animé d'un mouvement de rotation avec la vitesse angulaire constante égale à celle de la planète, admettent l'intégrale de Jacobi. L'expression du potentiel dépend de la fonction ζ , la vitesse et les coordonnées du satellite sont des fonctions données d'un paramètre q . Ainsi l'aut. arrive à une équation intégrale de la forme: $f_1(q) = \int K_1(q, \theta, \varphi) \zeta(\theta, \varphi) d\theta d\varphi + \int K_2 \zeta^2 d\theta d\varphi + \dots$ Discussion de l'équation linéaire présentant la première approximation, en particulier dans le cas d'une surface de révolution: l'unicité a lieu sauf certains cas exceptionnels. W. Stepanoff (Moskau).

Maruhn, Karl: Neuere Ergebnisse zum Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeit. S.-B. Berlin. math. Ges. 36, 25—32 (1937).

In diesem Vortrag wird kurz über die Grundzüge der Lichtensteinschen Theorie homogener Gleichgewichtsfiguren referiert. Zur Illustration dient das etwas andersartige, vom Verf. durchgerechnete Beispiel eines rotierenden Kreiszyinders und der für gewisse Werte der Winkelgeschwindigkeit von ihm abzweigenden zylindrischen Figuren mit nichtkreisförmigem Querschnitt. Zum Schluß wird auf die von Lichtenstein und anschließend vom Verf. behandelten inhomogenen Gleichgewichtsfiguren mit singulären Punkten auf der Oberfläche hingewiesen. E. Hölder (Leipzig).

Mathematische Physik.

● **Uller, Karl: Die Entdeckung des Wellen-Begriffes.** Würzburg-Aumühle: Konrad Triltsch 1937. VII, 107 S. u. 3 Abb. RM. 5.80.

Der Verf. versucht in dieser Abhandlung erneut nachzuweisen, daß die theoretische Physik bei Behandlung von Wellenaufgaben bisher stets falsche Wege gegangen sei, indem sie das Wesen der Welle nicht genügend berücksichtigt habe, sondern reine Feldphysik getrieben habe. Da sich der Verf. hierbei darauf beschränkt, auf die verschiedenen derartigen Fälle unter Bezugnahme auf andere eigene bereits erschienene oder evtl. später erscheinende Arbeiten hinzuweisen — das Literaturverzeichnis besteht aus 64 eigenen Arbeiten —, ist es schwer, die Berechtigung für diese Anklage nachzuprüfen. Der Verf. versucht weiter, das Wesen der von ihm als „Wellenkinematik“ bezeichneten „vorphysikalischen“ Theorie aufzuzeigen. Er weist darauf hin, daß zur Charakterisierung der Wellen neben den Phasenflächen auch die Amplitudenflächen beachtet werden müssen, die nicht zusammenzufallen brauchen, so daß jede Welle zwei Phasenfunktionen besitzt. Jede Welle unterliegt einem „Wanderzwang“, sie wird ausschließlich von ihrer Quelle, nicht von anderen Quellen beherrscht, besitzt also „Quellenverbundenheit“, sie behält auch bei Überlagerung von anderen Wellen ihre „Individualität“, ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist von der Stärke der Welle unabhängig. Aus diesen Haupteigenschaften, die nach Ansicht des Verf. bisher nicht berücksichtigt wurden, werden verschiedene Folgerungen abgeleitet, z. B. daß jede Welle nicht-umkehrbar ist und daß daher alle physikalischen Vorgänge in der Welt unumkehrbar seien, ferner daß es keine „stehenden Wellen“ geben könne, daß es Pleonasmus sei, von „Wanderwellen“ zu sprechen, u. a. m. Folgerungen werden auch abgeleitet mit Bezug auf die Relativitätstheorie, die Atomphysik usw. — Der Ref. möchte hierzu bemerken: Wenn in der theoretischen Physik viele Probleme zunächst unter Zugrundelegung eines einfachen Ansatzes darstellend durchgeführt werden, so ist sich der theoretische Physiker doch stets vollkommen darüber klar, daß die mit diesem Ansatz erhaltenen Ergebnisse noch nicht allgemeingültig sind, sondern daß es — um diese zu erhalten — notwendig ist, von allgemeineren Ansätzen auszugehen, wie sie z. B. vom Verf. angegeben werden. Es ist selbstverständlich, daß man so tieferen Einblick in die physikalischen Vorgänge erhalten wird und erhält, da durch spezielle Ansätze oft Wesentliches unterdrückt wird. Wenn dies nicht immer geschieht, so ist es oft in den durch sehr allgemeine Ansätze bedingten mathematischen Schwierigkeiten begründet, die auch der Verf. nicht in allen Fällen überwindet. Oft ist die Beschränkung

aber auch darin begründet, daß sich mit diesen einfachen Ansätzen schon sehr wesentliche und besonders die experimentell interessierenden Eigenschaften der physikalischen Vorgänge erfassen lassen. Auch scheint es dem Ref., daß der von dem Verf. betonte Unterschied mehr philosophischer als physikalischer Natur, an anderen Stellen mehr ein Unterschied der Bezeichnungen usw. ist. Hierdurch soll die sicher verdienstvolle Beschäftigung des Verf. mit den Wellenproblemen und seinen kennzeichnenden Eigenschaften nicht herabgesetzt werden. Leider sind die Arbeiten des Verf. durch die vielen Hinweise auf frühere Arbeiten und die Unterdrückung fast aller Ableitungen sehr schwer lesbar. *Picht* (Neubabelsberg).

Quantentheorie :

● Broglie, Louis de: *La physique nouvelle et les quanta*. (Bibl. de philos. sci.) Paris: Flammarion fils 1937. 312 pag. Frs. 15.—.

Pauli, W., und M. Fierz: *Über das H-Theorem in der Quantenmechanik*. Z. Physik 106, 572—587 (1937).

Die Verff. führen die v. Neumannschen Untersuchungen zur Begründung des Entropiesatzes innerhalb der Quantenmechanik weiter. Dabei wird die von Delbrück und Molière gemachte Annahme einer (kleinen) Unbestimmtheit in der Hamiltonfunktion des betrachteten Systems fallengelassen und das spezifisch thermodynamische (mit v. Neumann) in Eigenschaften des makroskopischen Beobachters begründet, der nur gewisse Mittelwerte der Zustandsgrößen des Systems messen kann. Wenn die mittlere Anzahl S/N von Zuständen pro Phasenzelle auf jeder „Energieschale“ $\gg (\log S)^2$ ist, so gilt (von trivialen Ausnahmen infolge Entartung abgesehen) das H-Theorem für die erdrückende Mehrheit aller Makrobeobachter. *P. Jordan*.

March, Arthur: *Berichtigung zur Arbeit: Statistische Metrik und Quantenelektrodynamik*. Z. Physik 107, 144 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 17, 44.

Madhava Rao, B. S.: *Ring-singularity in Born's unitary theory. II*. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 6, 129—134 (1937).

Nachdem der Verf. früher die Eigenschaften eines durch eine ringförmige Singularität dargestellten Elektrons auf Grund der ursprünglichen Form der Bornschen Elektrodynamik untersucht hat, führt er nunmehr die analoge Untersuchung auf Grund der Wirkungsfunktion von Hoffmann-Infeld durch. Auch in diesem Fall ergibt sich eine vollständige Übersicht in Gestalt recht einfacher Formeln. Jedoch zeigt sich im jetzt betrachteten Falle ebenso wie in früheren, daß der charakteristische Faktor 2 im Verhältnis des magnetischen und mechanischen Spinmomentes auf diesem Wege nicht erzielt werden kann. Die ringförmige Singularität scheint also nicht geeignet, eine „klassische“ Deutung des Spins im Sinne der Theorie von Kramers zu geben. (I. vgl. dies. Zbl. 15, 89.) *P. Jordan* (Rostock).

Courtines, M.: *Contribution à l'étude de la matrice du moment électrique*. Ann. Physique 8, 5—145 (1937).

Die von van Vleck und Niessen entwickelten quantenmechanischen Formeln für die dielektrische Polarisierung gründen sich wesentlich 1. auf gewisse vereinfachende Annahmen (van Vleck); 2. auf einen gewissen Mittelwertsatz (Niessen). Es werden nun die Gültigkeitsgrenzen des Niessenschen Theorems bestimmt und ferner die bei Verzicht auf die van Vleckschen Annahmen eintretenden Verallgemeinerungen untersucht. Es zeigt sich, daß die Langevin-Debyesche Formel in der Tat wesentlich von den van Vleckschen Annahmen abhängt; bei Nichtzutreffen dieser Annahmen ergeben sich statt dessen verallgemeinerte Formeln. Eine Reihe spezieller Anwendungen der allgemeinen Untersuchungen werden ausgeführt. *P. Jordan* (Rostock).

Bohr, Niels: *Transmutations of atomic nuclei*. Science, New York 86, 161—165 (1937).

Die Grundzüge von Bohrs Darstellung der Kernreaktionen durch ein Vielkörpermodell (vgl. dies. Zbl. 13, 237) werden erörtert und durch einfache mechanische Beispiele erläutert. Die Anwendbarkeit thermodynamisch-statistischer Begriffsbildungen auf die Kernreaktionen wird dargelegt und diskutiert. *C. F. v. Weizsäcker*.

Bethe, H. A.: Nuclear physics. B. Nuclear dynamics, theoretical. Rev. Modern Physics 9, 69—244 (1937).

Der Bericht (Fortsetzung zu H. A. Bethe und R. F. Bacher, dies. Zbl. 14, 184) zerfällt in folgende Abschnitte: IX. Kernprozesse als Mehrkörperprobleme (enthält die theoretischen Grundlagen und Methoden), X. Neutronen-(Zertrümmerungsprozesse und Diffusionstheorie), XI. α -Radioaktivität, XII. Streuung geladener Teilchen an Kernen, XIII. Zertrümmerung durch geladene Teilchen, XIV. γ -Strahlen. — Die Theorie der Kernprozesse baut auf der Tatsache auf, daß es nicht erlaubt ist, die Wechselwirkung eines stoßenden Teilchens mit einem Atomkern im Rahmen des „Einkörpermodells“ so zu behandeln, als ob der Kern lediglich als ein mittleres Potentialfeld auf das stoßende Teilchen wirkte. Vielmehr verteilt sich, wie zuerst Bohr (dies. Zbl. 13, 237) begründet hat, die Energie des stoßenden Teilchens auf alle Kernbestandteile, und es entsteht ein hochangeregter Zwischenkern von beträchtlicher Lebensdauer. Dies führt zu einer mit zunehmender Anregungsenergie und Teilchenzahl des Zwischenzustandes exponentiell zunehmenden Dichte der möglichen stationären Niveaus, die infolge der langen Lebensdauer sehr scharf sind. Für schwere Kerne kann man die Frage nach der Niveaudichte zurückführen auf thermodynamische Überlegungen; zu quantitativen Rechnungen ist es nötig, den Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur für den Kern zu kennen. Hier sind im wesentlichen zwei Modellvorstellungen entwickelt: 1. der Kern ist ein Fermigas, 2. der Kern ist ein Flüssigkeitströpfchen. Die letztere, von Bohr und Kalckar herrührende Vorstellung (noch unveröffentlicht) wird näher diskutiert. Die Zahl der möglichen Eigenschwingungen in diesem Modell wird berechnet und gefunden, daß den Hauptbeitrag die Oberflächenwellen liefern. Über die Volumenschwingungen (ohne Scherungswellen gerechnet, also reine Dilatationsschwingungen) sind die Aussagen unsicher. Die Term-dichte, die aus dem Tröpfchenmodell folgt, stimmt für Atomgewichte ≥ 50 recht gut überein mit der experimentellen Erfahrung, jedenfalls erheblich besser als die Folgerungen aus dem Fermigasmodell. Über die Breite der Niveaus sind die Aussagen bisher immer noch sehr unbestimmt; man ist hier weitgehend auf die Deutung des empirischen Materials mit Hilfe der Breit-Wigner-Formel und ihrer Erweiterungen für mehrere Resonanzniveaus angewiesen. — Die Arbeit enthält die Diskussion einer Fülle von einzelнем empirischem Material unter den genannten theoretischen Gesichtspunkten.

S. Flügge (Berlin-Dahlem).

Kalekar, F., J. R. Oppenheimer and R. Serber: Note on nuclear photoeffect at high energies. Physic. Rev., II. s. 52, 273—278 (1937).

Für Kernprozesse bei so hohen Energien, daß die Breiten der Niveaus groß sind gegen ihre Abstände, darf die Wirkung der einzelnen Niveaus nicht unabhängig überlagert werden. Die Verff. geben mit Hilfe der Dispersionstheorie eine Formel für diesen Fall an und diskutieren ihre Voraussetzungen, die im wesentlichen in der Annahme bestehen, daß zwischen Zuständen, in denen ein Teilchen frei ist, und „Compound“-zuständen, die durch eine (lange) Lebensdauer eindeutig charakterisiert werden können, scharf und ohne Zwischenstufen unterschieden werden könne. Die Formel wird auf den Kernphotoeffekt durch $(\text{Li} + \text{H})\text{-}\gamma$ -Strahlung angewandt und gestattet aus den empirischen Wirkungsquerschnitten eine Berechnung der partiellen Strahlungsbreite für den Übergang eines hochangeregten Zustandes in den Grundzustand.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Kalekar, F., J. R. Oppenheimer and R. Serber: Note on resonances in transmutations of light nuclei. Physic. Rev., II. s. 52, 279—282 (1937).

Die sehr scharfen Resonanzen bei Prozessen wie ${}^7\text{Li} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^8\text{Be} + \gamma$ werden durch die Annahme gedeutet, daß bei ihnen die Emission eines α -Teilchens, die energetisch sehr günstig wäre und daher die Resonanz völlig verschmieren müßte, die Umwandlung eines Spindrehimpulses in einen Bahndrehimpuls (oder umgekehrt) erfordern würde. Nimmt man an, daß die Spin-Bahn-Kräfte um den Faktor $(v/c)^2$ kleiner seien

als die normalen Kernkräfte, so vermindert diese Annahme die α -Emissionswahrscheinlichkeit um den Faktor $(v/c)^4 \sim 10^{-4}$.
C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Weisskopf, V.: Statistics and nuclear reactions. *Physic. Rev.*, II. s. 52, 295—303 (1937).

Verf. leitet in genauer Analogie zur Theorie der Verdampfung eines Flüssigkeitstropfens eine Formel für die Wahrscheinlichkeit der Emission eines Teilchens aus einem hochangeregten Kern ab. Da die dabei vom Kern verlorene Energie mit seiner gesamten Anregungsenergie vergleichbar ist, kühlt sich der Kern bei dem Prozeß ab; die für die Verdampfung maßgebende Temperatur ist die Temperatur des Endkerns. Der mittlere Energieverlust eines Neutrons der Anfangsenergie E beim Stoß mit einem Kern ergibt sich zu $E[1 - 2\sqrt{a/E}]$, wobei a eine von der Kernstruktur abhängige Größe zwischen 0,05 und 0,2 MV ist. Die gestreuten Neutronen haben eine etwa Maxwell'sche Energieverteilung. Für geladene Teilchen wird in erster Näherung einfach die gesamte Energieverteilung um einen durch Energiemaximum des Potentialbergs gegebenen Betrag zur Seite größerer Energien verschoben.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Yamanouchi, Takahiko: On the binding energy of atomic nuclei. II. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 19, 790—797 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 16, 429.

Tomonaga, Shin-ichiro: Bemerkungen über die kinetische Kernenergie im Hartree-Fock-Modell. *Sci. Pap. Inst. physic. chem. Res.*, Tokyo 32, 229—232 (1937).

Cernuschi, Félix: Sur le neutron. *J. Physique Radium*, VII. s. 8, 273—276 (1937).

Verf. schließt aus dem Massenüberschuß des Neutrons über das Proton, daß das Neutron nicht aus einem Proton und einem Elektron zusammengesetzt sein kann, und folgert daraus, daß vermutlich das Proton aus einem Neutron und einem Positron zusammengesetzt sei.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Brogie, Louis de: La quantification des champs dans la théorie du photon. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 205, 345—349 (1937).

Besprechung der Vertauschungsregeln der elektromagnetischen Feldstärken im Vakuumfall.

P. Jordan (Rostock).

Eddington, Arthur: Theory of scattering of protons by protons. *Proc. roy. Soc.*, Lond. 162, 155—174 (1937).

Kahan, Théodore: La théorie du deuton et les forces d'échange de forme exponentielle. *J. Physique Radium*, VII. s. 8, 281—284 (1937).

Die Arbeit enthält die angekündigte ausführlichere Darstellung der früheren Mitteilung (dies. Zbl. 15, 378), ohne Neues hinzuzufügen.

S. Flüge.

Wick, G. C.: Über die Streuung langsamer Neutronen an Atomgittern. II. *Physik. Z.* 38, 689—690 (1937).

Verf. ergänzt seine früher [*Physik. Z.* 38, 403 (1937); dies. Zbl. 16, 384] gegebene Berechnung der Streuung langsamer Neutronen an kubischen Gittern durch die Berücksichtigung der Isotopie und des Kernspins. Das Vorhandensein von Isotopen des streuenden Stoffes bedingt das zusätzliche Auftreten eines inkohärenten Streuanteils zu dem kohärenten Anteil; das gleiche gilt von dem Einfluß einer merklichen Spin-Spin-Wechselwirkung. Auf Grund dieser Feststellungen sollte sich durch Messungen der Streuung sehr langsamer („kalter“) Neutronen die Existenz der Spin-Spin-Wechselwirkung feststellen lassen.

Henneberg (Berlin).

Bhawalkar, D. R.: An explanation of the maximum in secondary electron emission from metals. *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A 6, 74—78 (1937).

Relativitätstheorie.

Ives, Herbert E.: The aberration of clocks and the clock paradox. *J. Opt. Soc. Amer.* 27, 305—309 (1937).

Ives, Herbert E.: Apparent lengths and times in systems experiencing the Fitzgerald-Larmor-Lorentz contractions. *J. Opt. Soc. Amer.* 27, 310—313 (1937).

Weyssenhoff, Jan von: Anschauliches zur Relativitätstheorie. II. Raumzeitmessungen in Gravitationsfeldern. *Z. Physik* 107, 64—72 (1937).

I. vgl. dies. *Zbl.* 12, 133.

Lichnerowicz, André: Extension du théorème de Gauss-Whittaker. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 25—27 (1937).

Ist R_4^4 die letzte Komponente des verjüngten Riemann tensors, so kann das Integral $\iiint R_4^4 \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ über ein Raum-Zeit-Volumen in ein gewisses 3faches Integral über die begrenzende Hyperfläche verwandelt werden, wenn die Metrik statisch oder konform zu einer statischen ist. Heckmann (Göttingen).

Tolotti, C.: Sulla generalizzazione delle equazioni di Dirac allo spazio della relatività generale. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 25, 377—382 (1937).

In 1933 Levi-Civita pointed out that it seemed impossible to obtain a direct extension of Dirac's equations to general relativity without introducing an auxiliary orthogonal ennuple which had no physical significance (see this *Zbl.* 6, 271). The present author shows how the theory of two-component spinors has overcome that difficulty, the paper being in effect a clear and concise statement of the two-component theory treated analytically. The notation is essentially that of Infeld and van der Waerden (this *Zbl.* 7, 184). H. S. Ruse (Southampton).

Simasaki, Seisaku: On the dynamics in Milne's model universe. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 19, 566—572 (1937).

Es werden physikalische Interpretationen einiger in der Milneschen Kosmologie vorkommenden Beziehungen versucht auf Grund von Identitäten, die aus einem Variationsprinzip entspringen, das ein Spezialfall des von A. G. Walker [*Proc. Roy. Soc. London A* 147, 478 (1934); dies. *Zbl.* 11, 137] aufgestellten ist. Heckmann.

Nernst, W.: Weitere Prüfung der Annahme eines stationären Zustandes im Weltall. *Z. Physik* 106, 633—661 (1937).

This is a further development of the author's cosmological theories (see this *Zbl.* 12, 322) based mainly on the hypotheses that the universe is in a stationary state and that there exists a process ("non-relativistic process") of the disappearance of mass. He first discusses further his theory of stellar evolution given in his previous paper. In order to explain why the continued emission of stellar radiation does not raise the temperature of interstellar space above the value ($\sim 3,2^\circ$ abs.) usually attributed to it, the author makes the hypothesis that the energy of a light-quantum in space decreases with time according to the law $\log(\nu_0/\nu) = Ht$. Here ν is the frequency of the quantum at time t , ν_0 its value at $t = 0$, and H a constant. This hypothesis is analogous to that of the "non-relativistic" disappearance of mass. This provides also his explanation of the red-shift of light from distant nebulae, the observed value of which he uses to determine H . He therefore considers that this red-shift is not a Doppler effect. He then criticises the hypothesis of an "exploding" universe and considers it to be untenable. His assumption concerning the red-shift means that the decrease in the flux of light from a source depends on two factors, the usual inverse square factor, and an exponential factor representing the effect of the new hypothesis. The author now suggests that the propagation of gravitation should follow a similar law, and considers that this removes the well-known difficulties associated with the application of the unmodified inverse square law to an infinite universe. Further he suggests that the kinetic energy of a moving body in space should undergo the

same type of decrease with time, as does the energy of a light quantum, and he traces the consequences of this supposition. The author considers that matter is born from the aether in the form of neutrons of high kinetic energy, and ultimately disappears into the aether after disintegrating into neutrons of low kinetic energy. The author finally discusses the relation to his theories of the age of meteorites, the nova-problem, white dwarf stars, and cosmic rays. In particular he puts forward the suggestion that the super-nova phenomenon accompanies the splitting of an early-type star into a double star.

W. H. McCrea (Belfast).

Astrophysik.

Gratton, L.: Problemi di equilibrio radiativo e loro soluzione mediante i polinomi di Legendre. Mem. Soc. astron. Ital., N. s. 10, 309—337 (1937).

The standard Schwarzschild problem of the radiative equilibrium of a stellar atmosphere, in which there is local thermodynamic equilibrium, is considered. The case of a plane-stratified atmosphere is first taken. The standard equation for the intensity $I(\tau, \theta)$ of radiation, in direction θ with the vertical, at optical depth τ , is written down, and a solution is sought in the form $I = \sum_{i=0}^{\infty} I_i P_i$, when $P_i(\mu)$, with $\mu = \cos \theta$, is the Legendre polynomial of order i , and $I_i(\tau)$ is a function of τ only. It is shown that I_i must satisfy

$$\frac{i+1}{2i+3} \frac{dI_{i+1}}{d\tau} + \frac{1}{2i+1} \frac{dI_{i-1}}{d\tau} = I_i, \quad (i > 0)$$

$$\frac{1}{3} \frac{dI_1}{d\tau} = I_0 - B,$$

where $B = \sigma T^4/\pi$ in the usual notation of the subject. Taking only the first two terms in the expansion for I leads effectively to the well-known Milne-Eddington first approximation. The author then considers the second approximation obtained by taking the first four terms. He works out the corresponding variation of temperature T with τ , and the law of darkening across the disc. His tables of the results of this approximation show good agreement with the results of higher approximations given by other writers. He then proceeds to apply similar methods to extended stellar atmospheres, that is to cases in which the curvature of the atmospheric layers has to be taken into account. Here one cannot work in terms of τ only, without knowing how the product of the opacity κ and density ρ depends on τ . If a simple law is assumed for the latter dependence, complications are found to occur elsewhere. So the author adopts the device of assuming the coefficient $I_2(\tau)$ to have the same form as in the plane-stratified case, and works out the expression for $\kappa\rho$ required to give this result. The arbitrary parameter in this form of I_2 is found to be a suitable measure of the "extensiveness" of the atmosphere. A table is given of $T(\tau)$ in two typical examples.

W. H. McCrea (Belfast).

Kopal, Zdeněk: Bemerkung zur Theorie der rotierenden Polytropen. Z. Astrophys. 14, 135—138 (1937).

Chandrasekhar (this Zbl. 7, 39, first equation quoted) has given the differential equation of polytropic equilibrium for a rotating polytrope, and found an approximate solution for the case of small angular velocity. The present author points out that the equation can be solved exactly, by the method of separation of the variables, in the particular case $n = 1$, when n is the polytropic index. However he finds difficulty in expressing the constant of separation in terms of the angular velocity, of which it must be a function. Nevertheless he suggests a way of using his solution to test the range of validity of Chandrasekhar's for the case $n = 1$. W. H. McCrea (Belfast).

Takeda, Shin-ichiro: Theoretical light curves of eclipsing variables of the β Lyrae type. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* **20**, 47—86 (1937).

Die Methode von Russell der Elementenbestimmung von Bedeckungsveränderlichen des β Lyrae-Typus wird vervollständigt, indem die beiden Sterne von flutverzerrter Form und ungleichmäßiger Flächenhelligkeit angenommen werden. Ihr innerer Aufbau entspricht dem Modell von Eddington. Die Ausgangsformeln sind einer früheren Arbeit des Verf. entlehnt [*Mem. Coll. Sci. Kyoto A* **17**, 197 (1934); dies. Zbl. **10**, 87]. Der Reflexionseffekt wird als Zusatzkorrektion berücksichtigt. Die Anwendung der Methode wird durch Tabellen erleichtert, welche für die beiden Fälle — gleichmäßige Flächenhelligkeit und Randhelligkeit = 0 — die theoretische Lichtkurve ergeben. Die Anwendung für den Stern β Lyrae (Lichtkurve von Stebbins) ergab zwei Lösungen je nach größerer Deformation der einen oder anderen Sternkomponente. Eine Helligkeitsabnahme zum Rande ist merkbar, läßt sich aber nicht genauer bestimmen. Die beobachtete Lichtkurve weist unerklärliche Abweichungen auf.

A. Michailov (Moskau).

Bohrmann, A.: Zur Theorie des Sternaufbaus. *Astron. Nachr.* **263**, 449—468 (1937).

The author studies the structure of stellar models assuming the validity of Kramers's absorption law and of the perfect gas laws. He takes first the case of a constant rate of energy generation. By using as independent variable x proportional to the square root of the temperature T , and dependent variable y the ratio of radiation-pressure to total pressure (usually written $1 - \beta$), he obtains a differential equation which lends itself to graphical and numerical discussion and facilitates the calculation of the temperature and density distribution. He isolates a particular solution, which he calls the E -solution, of his fundamental differential equation in x, y , which he studies in detail. He shows that all solutions which might be used as models of real stars differ inappreciably from the E -solution. He then applies similar methods to cases in which the mean rate of energy-generation inside radius r is proportional to a power of T , the temperature at radius r . He examines in the usual way the conditions for the presence of a convective zone, and shows how this depends on the law of energy-generation.

W. H. McCrea (Belfast).

Laue, M. v.: Theoretisches über die Helligkeit ferner Nebel. *Z. Astrophys.* **12**, 208—211 (1936).

Some writers (especially de Sitter) on the "expanding universe" use as the relation between the apparent brightness H of an object and the frequency ν of the quanta received from it

$$H/\nu = \text{const.} \quad (1)$$

Other writers (Hubble and Tolman, and others) use

$$H/\nu^2 = \text{const.} \quad (2)$$

Both sets of writers use the theory of light-quanta. The writer now applies his previous solution of Maxwell's equations of the electromagnetic field in the appropriate space-time (this Zbl. **1**, 245) and recovers the form (2).

W. H. McCrea (Belfast).

Sambursky, S.: Static universe and nebular red shift. *Physic. Rev.*, II. s. **52**, 335—338 (1937).

The author appeals to v. Laue's assertion that in an expanding universe all ordinary lengths share the expansion (this Zbl. **1**, 245). Since an apparent expansion is in fact observed, he suggests that it can be explained by supposing that the large-scale universe is static, all "cosmical" lengths remaining constant, while "atomic" lengths undergo a shrinkage. This he explains by a secular decrease of Planck's constant h . A number of speculations based on this effect are discussed; in particular it is suggested that the constant of gravitation is proportional to the rate of change of h .

W. H. McCrea (Belfast).